

**KORRELATOREN MIT
ANALOGEN FILTERPAAREN UND SYNTHESE
GEEIGNETER CODIERUNGSSIGNALE
FÜR DEN DELAY-LOCKED-LOOP**

von
Klaus Lehmann

Erlangen, 1980

1980 # 196



Digitized by the Internet Archive
in 2026

KORRELATOREN MIT ANALOGEN FILTERPAAREN UND SYNTHESE GEEIGNETER CODIERUNGSSIGNALE FÜR DEN DELAY-LOCKED-LOOP

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor - Ingenieur



vorgelegt von
Klaus Lehmann

Erlangen, 1980



Als Dissertation genehmigt von der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 22.1.1980

Tag der Promotion: 25.3.1980

Dekan: Prof.Dr.-Ing. H. Niemann

Berichterstatter: Prof.Dr.-Ing. M. Brunk

Prof.Dr.phil.nat. H. Schlitt

Herrn Prof.Dr.-Ing.M. Brunk danke ich für die interessante und aktuelle Aufgabenstellung, die zahlreichen Anregungen und Hinweise und für die Hilfe bei der Abfassung der Niederschrift.

Herrn Prof.Dr.-Ing.H.W. Schüßler gebührt mein Dank für seine Unterstützung beim Zustandekommen dieser Arbeit.

Schließlich sei auch Herrn Prof.Dr.phil.nat.H. Schlitt für die Übernahme des Zweitreferates und sein damit gezeigtes Interesse gedankt.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
LISTE DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN	IV
1. Einleitung	1
2. Übersicht, Entwicklung bis zum gegenwärtigen Stand	5
2.1 Spektrale Spreizung als Multiplexverfahren (Spread Spectrum Concept, Codemultiplex)	5
2.2 Impulsverdichtung von Ortungssignalen	14
2.3 Der Delay-Locked Loop (DLL)	22
2.3.1 Das Basisband-Modell (Video-Korrelation)	22
2.3.2 Phasenkohärente Korrelation im Trägerfrequenzbereich	36
2.3.3 Bandpaßkorrelation (Einhüllenden-Korrelation)	38
3. Der Korrelator mit analogem Filterpaar	41
3.1 Bedingung für ungerade KKF	41
3.2 Verschiedene nicht realisierbare Filter	46
3.2.1 Differenzierer	46
3.2.2 Hilbert-Transformation	48
3.2.3 Integrierer	50
3.3 Realisierbare Filter	52
3.3.1 RC-CR-System	52
3.3.2 RLC-Kreis	61
3.3.3 Impulsformer	74
3.3.4 Korrelator mit Verzögerungsgliedern	92
3.3.5 Allpaßstruktur	96

3.4 Bestimmung des Rauscheinflusses am Korrelatorausgang	101
3.4.1 Allgemeine Formulierung des Problems	101
3.4.2 RC-CR-System	104
3.4.3 Allpaß-Korrelator	110
3.4.4 Verzögerungsstruktur	116
3.4.5 Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Messungen	120
3.4.6 Auswahl des günstigsten analogen Korrelators	132
4. Störleistungsspektrum bei Korrelatoren mit analogen Filtern	135
4.1 Problemstellung, Verteilungsdichten	135
4.2 Das Leistungsdichtespektrum $S_x(\omega)$ beim RC-Modell	139
4.3 Verwendung von kurzen PN-Folgen als Basis-signal $s(t)$	140
4.3.1 Systemtheoretische Generierung von PN-Folgen	140
4.3.2 Mehrstufige PN-Folgen bei gleicher AKF	145
4.3.3 Entwicklung des Simulationsmodells	154
4.3.4 Vergleich von Simulation und Messung	169
4.3.5 Meßtechnischer Vergleich von RC- und Allpaß-Korrelator	186
5. Weitere mehrstufige Folgen mit vorgebbaren Eigenschaften	194
5.1 Signale mit Barker-Autokorrelationseigenschaften	194
5.2 Mittelwertfreie Folgen	202
5.2.1 Synthese	202
5.2.2 Anwendung für die Radarsignalerzeugung	219

	Seite
5.3 Periodische orthogonale Signale	220
5.3.1 Synthese	220
5.3.2 Anwendung orthogonaler Signale	236
5.3.2.1 Verwendung beim DLL	236
5.3.2.2 M-Transformation	237
5.3.2.3 Digitale Systemanalyse	243
6. Der geschlossene DLL-Regelkreis	247
6.1 Allgemeine Betrachtungen, Ersatzbild	247
6.2 Bestimmung der Varianz des Zeitverzögerungsfehlers bei linearisierter Kennlinie $A(\epsilon)$	254
6.2.1 Allgemeine Beziehungen	254
6.2.2 Der " $1-T_c$ "-DLL	259
6.2.3 Das Allpaßmodell	260
6.2.4 Der RC-Korrelator	267
6.3 Vergleich	271
7. Zusammenfassung	274
Anhang	276
Literaturverzeichnis	305

Formelverzeichnis

a	Amplitudenfaktor
$A(z)$	Allpaß-Übertragungsfunktion
$A(\epsilon)$	Korrelator-(Diskriminator)-Kennlinie
$B(j\omega)$	Systemübertragungsfunktion
$B(z)$	
$C(j\omega)$	
$C(z)$	
$c(t)$	(komplexes) Codesignal
$\text{DFT}\{x(k)\}$	Diskrete Fouriertransformation von $x(k)$
$e(t)$	Empfangssignal
$E\{x(t)\}$	Erwartungswert von $x(t)$
f	Frequenz
f_C	Taktfrequenz
f_R	Rauschbandbreite
$F(j\omega)$	Übertragungsfunktion des Schleifenfilters
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Fouriertransformierte von $x(t)$
$\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$	Inverse Fouriertransformierte von $X(j\omega)$
$G(j\omega)$	Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$H(j\omega)$	Übertragungsfunktion allgemein
$h(t)$	Impulsantwort von $H(j\omega)$
i	Laufvariable
IDFT{ }	Inverse diskrete Fouriertransformation
Im{ }	Imaginärteilbildung
j	imaginäre Einheit
k	zeitdiskrete Variable
$u(k)$	Segment aus einer periodischen zeitdiskreten Folge
$u(t)$	Zeitsignal
$v(k)$	periodische zeitdiskrete Folge
$w(a)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$x(t)$	Zeitsignal am Korrelatorausgang
$\overline{x(t)}$	Zeitmittelwert von $x(t)$
z^{-1}	Verzögerungsoperator
$Z\{x(k)\}$	Z-Transformierte von $x(k)$
$Z^{-1}\{X(\mu)\}$	Inverse Z-Transformierte von $X(\mu)$
α β	} Verstärkungsfaktoren, Konstanten
$\delta_0(t)$	
$\delta_{-1}(t)$	Sprungfunktion

$\gamma_0(k)$	Kronecker-Symbol, "1"-Impuls für zeitdiskrete Signale
ϵ	Verzögerungsdifferenz
ϑ	Polwinkel
σ_T^2	Varianz des Prozesses $\hat{T}$
τ	Zeitvariable, Zeitverschiebung
K_v	Verstärkungsfaktor des Blockes v
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	Laplace-Transformierte von $x(t)$
$n(t)$	weißes Rauschen
$n'(t)$	weißes Rauschen, transformiert
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
N_0	Zweiseitige Rauschleistungsdichte des weißen Rauschens
p	Länge eines Codesignales
$\text{rect } \frac{t}{T}$	Einheitsrechteckimpuls der Breite T
$R_x(t)$	Autokorrelationsfunktion des Signales $x(t)$
$R_{xy}(\tau)$	Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den Signalen $x(t)$ und $y(t)$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
s	komplexe Frequenzvariable
$\text{si } x$	$\frac{\sin x}{x}$ - Funktion

$s(t)$	Sendesignal, periodisches Codesignal
$s_s(t)$	Segment aus $s(t)$
s_{0v}	Nullstelle
$s_{\infty v}$	Polstelle
	} einer Übertragungsfunktion
$S_x(\omega)$	Leistungsdichtespektrum von $x(t)$
$S_{xy}(\omega)$	Kreuzleistungsdichte der Signale $x(t)$ und $y(t)$
t	Zeitvariable
T_c	Chipzeit, Breite eines Einzelrechteckes, Taktzeit
T_F	Filterzeitkonstante
$\hat{T}$	Schätzwert der Zeitverzögerung T
φ	Phase, Phasenwinkel
ω	Kreisfrequenz
Ω	normierte Kreisfrequenz
ϕ	Phase
DLL	Delay-Locked Loop (Verzögerungsregelschleife)
PLL	Phase-Locked Loop (Phasenregelschleife)
SGO	Spannungsgesteuerter Oszillator (VCO)
*	Faltung
$\hat{*}$	zyklische Faltung

1. Einleitung

Die sprunghafte Entwicklung der Nachrichtentechnik in den letzten 40 Jahren führte zu völlig neuartigen Systemen der Nachrichtenübermittlung.

Zwei Gebiete aus diesem großen Komplex werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit näher angesprochen. Es sind dies das zur Vielfachausnutzung eines gestörten Nachrichtenkanals (neben Zeitmultiplex und Frequenzmultiplex) verwendete dritte Verfahren, die sogenannte Code-multiplextechnik und eine der Impulskompressionstechnik ähnliche Möglichkeit, die Entfernungsauflösung von Radar- oder Sonarpulssystemen bei gleicher Reichweite und gleicher Spitzenleistung der Sendeimpulse zu verbessern.

Beiden Gebieten ist gemeinsam, daß wegen militärischer Forderungen des 2. Weltkrieges und bedingt durch die heutige Wehrtechnik, deren Güte vorwiegend von der "besseren Elektronik" bestimmt wird, neue Erkenntnisse geheim gehalten wurden. Erst Anfang der 70er-Jahre erfolgte speziell durch Cahn [12], Dixon [18] und Aldinger [2] die Information einer breiteren Schicht von Wissenschaftlern, obwohl bereits in den 60-er Jahren beispielsweise von Spilker, Gill und Magill [23, 24, 69, 70] einige Basissysteme nebst Analyse vorgestellt wurden.

Beiden zu behandelnden Gebieten liegt eine Synchronisations-schaltung zugrunde, die in der Literatur mit Delay-Locked Loop, abgekürzt DLL, bezeichnet wird.

Im Prinzip handelt es sich dabei um eine dem Phased-Locked-Loop [11, 43, 44, 55] ähnliche Regelschaltung, bei der ein breitbandiges Empfangssignal mit fester oder variabler Zeitverzögerung $T(t)$ mit einem Referenzsignal gleicher Struktur und dem Schätzwert der Verzögerung $\hat{T}(t)$ verglichen wird.

Damit ist es möglich, mehrstufige Signale mit Barker-Autokorrelationsfunktionen für beliebige ungerade p (also auch $p > 13$) zu bestimmen. Diese Signale als auch angebbare mittelwertfreie Folgen bieten sich für den Impulsbetrieb von Ortungsanlagen an, wenn durch Impulsverdichtung eine Verbesserung des Auflösungsvermögens bei der Zielentfernung gewünscht wird. Mit einem auf Nullstellensuche basierenden Verfahren als auch durch direkte Berechnung mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation ist es weiterhin möglich, verschiebungsortho-gonale Folgen zu bestimmen.

Diese haben, periodisch fortgesetzt, eine Autokorrelierte innerhalb einer Periode, welche exakt der AKF von echten -1 , 1 -Zufallsfolgen entspricht. Drei mögliche Einsatzgebiete solcher orthogonaler Funktionen werden angesprochen.

Im 6. Kapitel wird in Abhängigkeit vom Kanalrauschen und ohne Berücksichtigung des Multiplikationsrauschens die Varianz des Zeitverzögerungsfehlers des geschlossenen Regelkreises bei linearisierter Kennlinie für Allpaß- und RC-Korrelatornetzwerk für den technisch interessanten Bereich der Rauschbandbreite berechnet und mit dem bisher als optimal bekannten " $1-T_c$ "-Korrelator verglichen. Dabei ergeben sich für die realisierbaren Korrelatortypen neben dem Vorteil der auch für mehrstufige Folgen einsetzbaren Struktur Verbesserungen von etwa 4 dB.

2. Übersicht, Entwicklung bis zum gegenwärtigen Stand

2.1 Spektrale Spreizung als Multiplexverfahren

(Spread Spectrum Multiple Access, Codemultiplex)

Die Technik der spektralen Spreizung einer Nachricht ist seit mehr als 20 Jahren bekannt. Allerdings beschränkte sich ihr Einsatz vorwiegend auf militärische Zwecke, um Interferenzen und den Einfluß feindlicher Störungen bei Nachrichtenübertragungssystemen klein zu halten. Den Namen erhielt das Verfahren durch die Art der spektralen Spreizung mittels Codeworten mit statistisch oder pseudostatistisch wechselnden Zeichen, deren Bandbreite groß gegenüber der erforderlichen Nachrichtenbandbreite ist, d.h. es handelt sich um ein bandspreizendes Modulationsverfahren.

Allgemein bezeichnet man Nachrichtensysteme, bei denen eine gemeinsame Übertragungsstrecke mit der Kanalbandbreite B von mehreren Teilnehmern benutzt wird, als Vielfachzugriffssysteme. Legt man die Selektion in die Variable "Frequenz f ", so spricht man von Frequenzmultiplex. Hierbei können $N = \frac{B}{b}$ Teilnehmer mit der Nachrichtenbandbreite b und der gleichen Sendeleistungsdichte $S(\omega)$ gleichzeitig (d.h. zu allen Zeiten) den zur Verfügung stehenden Kanal benutzen. Beim "Zeitmultiplex" hingegen kann ein Teilnehmer die gesamte Bandbreite B mit der vom Kanal her erlaubten maximalen Leistungsdichte $S_{\max}(\omega)$ nur für kurze Zeitabschnitte Δt belegen, die sich periodisch nach der Zeit T wiederholen. Bei einem solchen Verfahren sind zum Empfang üblicherweise Bit- und Rahmensynchronisation erforderlich.

Ein Codemultiplex-Kanal ist nun weder in der Zeit T noch innerhalb der Bandbreite B beschränkt, dafür aber bezüglich der Leistungsdichte $S(\omega)$ |2|.

Die Detektion des Signales kann nur erfolgen, wenn auf der Empfangsseite a-priori-Kenntnisse des verwendeten Spreizungscodes vorhanden sind. Allerdings ist auch bei diesem Verfahren eine aufwendige Synchronisationsschaltung (meist ein DLL) für den Referenzcode erforderlich.

Das folgende Bild 2.1 verdeutlicht noch einmal anhand des Nachrichtenquaders mit den Dimensionen B , T , $S_{\max}$ die drei Multiplexverfahren:

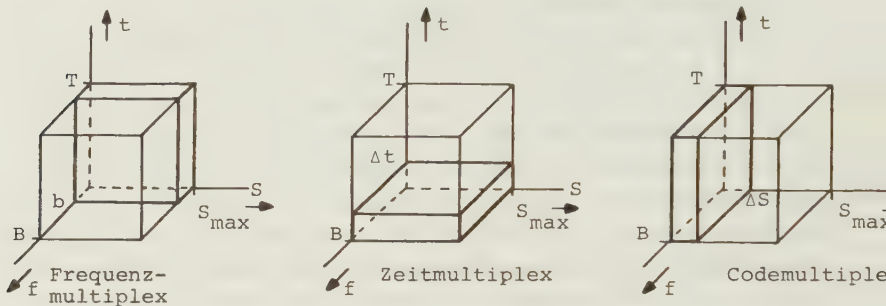


Bild 2.1 Multiplexverfahren

Anhand des folgenden Bildes 2.2 wird aufgezeigt, durch welche Modulationsarten die Spreizung der Nachrichtenbandbreite b auf die Kanalbandbreite B vorgenommen werden kann [62].

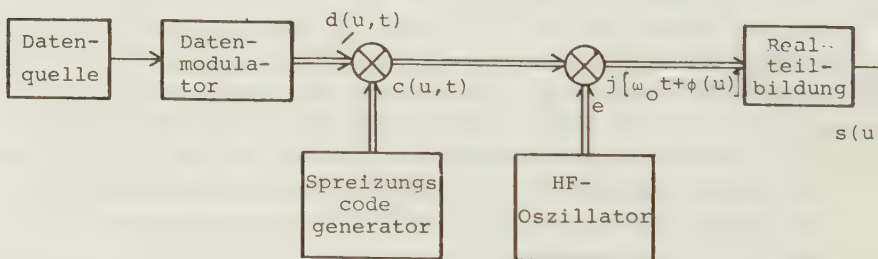
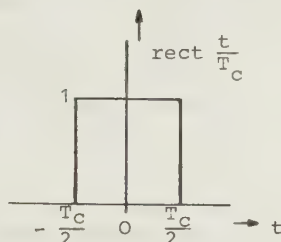


Bild 2.2 Sender für Codemultiplex

Dabei bedeuten die Doppelstriche im Blockschaltbild, daß komplexe Zeitfunktionen vorliegen, die man praktisch durch Normal- und Quadraturkanäle realisieren kann, u im Argument der Zeit- bzw. Phasenfunktionen repräsentiert eine Zufallsvariable. Das Spreizungssignal $c(u,t)$ besitze eine sehr viel größere Bandbreite als das modulierte Datensignal $d(u,t)$.

Im Fall des Direkt-Sequenz-Konzeptes gilt für das Spreizungssignal:

$$c(u, t) = \sum_n a_n \cdot \text{rect} \frac{(t - nT_c)}{T_c}$$



mit $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ oder $\{a_n\} \in \mathbb{C}$.

Bei bisher bekannten Systemen ist der Wertevorrat für a_n wegen einfacherer Erzeugung (z.B. Pseudo-Noise Folgen) und der Vereinfachung der Demodulation auf $\{a_n\} \in [-1, 1]$ eingeschränkt, obwohl hier prinzipiell auch mehrstufige Folgen zur Anwendung kommen könnten.

Für das sogenannte Frequenzsprungverfahren (Frequency Hopping) hat das Spreizungssignal die folgende Form:

$$c(u, t) = \sum_n e^{j[\omega_n \cdot t + \varphi_n(u)]} \cdot \text{rect} \frac{t - nT_s}{T_s}$$

mit ω_n als Verschlüsselungsfolge (-sequenz) und T_s als Sprungzeit. $\varphi_n(u)$ ist als eine im Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilte Zufallsphase anzusehen.

Zur idealen Verschlüsselung müßten $\{a_n\}$ bzw. $\{\omega_n\}$ nach einer echten Zufallsfolge verlaufen, so daß keine mathematische Beschreibung möglich wäre. Dann ist aber eine Nachbildung auf der Empfangsseite unmöglich.

Der notwendige Kompromiß besteht nun darin, die Verschlüsselungsfolgen hinreichend zufällig (pseudo-zufällig) und damit periodisch zu gestalten.

Werden Datentakt und Codetakt für $\{a_n\}$ bzw. $\{\omega_n\}$ auf der Sendeseite starr verbunden, so ist bei genügend langer Periodendauer des Spreizungssignals eine empfangsseitige Entschlüsselung nur durch Kenntnis des Spreizungscodes möglich [62].

Um das Entschlüsselungsprinzip klar zu machen, wird vorausgesetzt, daß das Sendesignal $s(u, t)$ auf dem Übertragungsweg nur eine zufällige Verzögerung $T(u)$ und eine Dopplerverschiebung $\omega_d(u)$

erfährt, d.h. Rauscheinflüsse bleiben unberücksichtigt. Damit liegt das Signal am Empfängerereingang in der Form

$$e(u, t) = \operatorname{Re} \left\{ c[u, t-T(u)] \cdot d[u, t-T(u)] \cdot e^{j[\omega_0 \cdot t + \omega_d(u) \cdot t + \phi(u)]} \right\}$$

vor.

Das zur Rückgewinnung des Datensignals erforderliche Empfängerblockschaltbild ist in Bild 2.3 dargestellt.

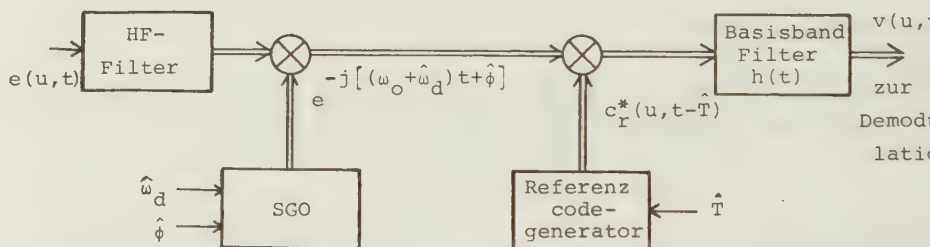


Bild 2.3 Empfänger für Codemultiplex

Dabei müssen die Schätzwerte $\hat{\omega}_d$, $\hat{\phi}$ über einen geeigneten Phased Locked Loop (PLL) dem spannungsgesteuerten Oszillator SGO zugeführt werden und der Referenzcodegenerator benötigt den Schätzwert $\hat{T}$ von einem hier nicht dargestellten Regelkreis, der meist als Delay-Locked-Loop (DLL) ausgeführt ist. Sind die nachfolgenden 3 Bedingungen erfüllt, so ist, wie in [62] gezeigt wird, eine exakte Demodulation des Datensignals möglich.

$\hat{\omega}_d \approx \omega_d(u)$	frequenzsynchronisiert
$\hat{\phi} \approx \phi(u)$	phasensynchronisiert
$\hat{T} \approx T(u)$	Code-synchronisiert.

Ein wesentliches Problem bei einem Codemultiplex-System ist die Suche und Verwendung von geeigneten Codekollektiven. Sind

nämlich einem Kanal N Teilnehmer zugeordnet, so erfolgt die Selektion ja ausschließlich über die Struktur der Spreizungsfunktion. Um einfache und fehlersichere Regelschaltungen aufbauen zu können, ist es erforderlich, daß die verwendeten Funktionen $c_v(t)$ günstige Autokorrelationsfunktionen haben, d.h. die AKF sollte möglichst zweiwertig mit einem hohen Haupt- zu Nebenmaximumsverhältnis sein.

Andererseits sollten bei mehreren Teilnehmern pro Kanal die Beeinflussungen der Teilnehmer 2 bis N auf den Empfang des Teilnehmers 1 möglichst gering sein. Das verlangt Codekollektive mit möglichst kleinen Kreuzkorrelationsfunktionen. Zusätzlich wäre es wünschenswert, wegen der leichteren Implementierung der Empfangseinrichtungen nur zweiwertige Codewörter zuzulassen. Allein schon die Forderungen nach gewünschten Auto- und Kreuzkorrelationseigenschaften widersprechen sich [39, 40, 41]. In [18] werden als Kompromiß die sogenannten Gold-Codes vorgestellt, bei denen man durch Verschachtelung von Pseudo-Noise-Folgen neue zweiwertige Folgen generieren kann, bei denen eine obere Schranke der Kreuzkorrelation zwischen zwei Codewörtern angebar ist. Lindner [39, 41] hat durch Entwicklung einer speziellen Binär-algebra Codekollektive bis zu einer Länge von 40 vorgestellt, die günstige AKF- und KKF-Eigenschaften haben, er zeigt aber auch, daß bei genügend großer Folgenlänge geeignet ausgewählte Pseudo-Noise-Folgen eine gute Alternative liefern.

Gelänge es, alle zur Spreizung verwendete Modulationssignale zueinander orthogonal zu machen, so gäbe es im Empfangskanal keine Störungen durch die benachbarten Quellen [61]. Es ergibt sich dann der gleiche Störabstand bei Codemultiplex wie für ein Frequenz- oder Zeitmultiplexsystem [2]. Herold und Aldinger stellen in [31] ein sogenanntes quasiorthogonales Codekollektiv vor, das von seiner Eigenschaft zwischen der von Pseudo-Noise-Folgen und der von Walsh-funktionsähnlichen Orthogonalfolgen liegt, welche aber eine gemeinsame Zeitbasis besitzen müßten.

Basierend auf der Tatsache, daß Hadamard-Matrizen der Ordnung l für $l=2$ und Vielfachem von 4 mit Elementen $a_v \in [1, -1]$ zueinander orthogonale Vektoren erzeugen, werden geeignete Kombinationen von Pseudo-Noise- und orthogonalen Folgen gesucht, wobei bei den entstehenden quasiorthogonalen Folgen die AKF und die KKF nur noch von einem Teil der entstandenen Folgen bestimmt wird.

Allerdings ist die AKF der Repräsentanten aus dem quasiorthogonalen Codekollektiv nicht mehr nur zweiwertig. Ein Hinweis auf eine für solche Codes geeignete Regelschaltung (DLL) fehlt in [31].

Betrachtet man die bisher nur punktuell bezüglich geeigneter Codes aufgezeigten Schwierigkeiten, wobei die Implementierung geeigneter Synchronisationsschaltungen (DLL) noch gar nicht angesprochen ist, so wirft sich die Frage auf, ob eine Anwendung der Codemultiplextechnik als drittes Verfahren überhaupt sinnvoll ist. Hierbei seien noch einmal die Vorteile aufgezeigt, wonach sich im Einzelfall je nach Anforderungswunsch an ein Nachrichtenübertragungssystem die Antwort von selbst ergibt:

Beim Codemultiplex gelingt noch eine Signalübertragung mit sehr kleinen Signal-zu Rauschverhältnissen, d.h. hoher Störrate bzw. kleinen Signalpegeln. Das bedeutet geringe Entdeckbarkeit der Nachricht. Entschlüsselung ist nur möglich, wenn dem Empfänger der sendeseitig verwendete Spreizungscode bekannt ist. Die Übertragungsstrecke ist relativ unempfindlich gegen Mehrwegeausbreitung. Wechsel der Nachrichtenquelle beim gleichen Empfänger geschieht einfach durch Wechsel des Referenzcodes. Für die einzelnen Teilnehmer ist keine Zeitkoordination erforderlich. Bezüglich der Übertragung mit kleinen Signalpegeln führt Davies [15] ein Beispiel an: Eine digitale Sprachübertragung mit einem Basisbandbedarf von $b = 20$ kHz erfordert ein Signal/Rauschverhältnis zur Demodulation von etwa 10 dB. Nach Spreizung des Basisbandes auf $B = 5$ MHz kann die Information noch mit -14 dB übertragen werden, d.h. es erfolgt ein Austausch von erforderlicher Bandbreite zum nötigen Signal-Rauschleistungsverhältnis, ähnlich wie bei Anwendung von Breitbandfrequenzmodulation.

Die beim Codemultiplex erforderliche aufwendige Synchronisationsschaltung wird heute und zukünftig durch den Einsatz von Charge Coupled Devices (CCD's) und Oberflächenwellenschaltkreisen (Surface Acoustic Devices, SAW's) zur Korrelation von Sende- und Referenzspreizungsfolge vereinfacht und leichter ausführbar gemacht. Dabei spielen auch die Mikroprozessoren für den Steuerungsvorgang [15, 16, 22] eine entscheidende Rolle. Bezüglich der zu verarbeitenden Frequenzen decken momentan verfügbare CCD-Kreis-

den Videobereich bis etwa 10 MHz bei einer Dynamik bis 70 dB und SAW-Schaltungen von 10 MHz bis 1500 MHz mit etwa 50% relativer Bandbreite und ca. 100 dB Dynamik ab [17]. Davies [17] beschreibt beispielsweise ein Spreizungssystem, bei dem ein Mikroprozessor zur Regelung des spannungsgesteuerten Oszillators und des Codegenerators eingesetzt wird. Als Modulationsverfahren wird Phasenumtastung ($0, \pi$) mit einem Pseudo-Noise Unterträger verwendet. Die Taktfrequenzen dieser PN-Folge sind allerdings durch die relativ niedrige Verarbeitungsgeschwindigkeit der Mikroprozessoren bis etwa 10 kHz begrenzt.

Dabei kommen die Prozessoren vom Typ F8, 8080 und 6800 (vergleichend) zum Einsatz. Multiplikationen, Additionen zur Bildung der AKF's und die Steuerung der Schwellen für Einlauf und Nachführung des Referenzcodes werden vom Mikroprozessor übernommen. Wegen des hohen Rechenzeitaufwandes wird dabei nicht die komplette KKF, sondern es werden nur Ausschnitte daraus berechnet, ähnlich dem auf völlig anderer Technologie begründeten in [5] geschilderten Verfahren. Ein solches Mikroprozessor-Konzept ist wegen der noch endlichen oberen Verarbeitungsgeschwindigkeit allerdings nur für geringe Datenraten anwendbar.

Angaben über schon ausgeführte Codemultiplexsysteme sind aus bereits angesprochenen Gründen kaum publiziert. Gerhard [22] nennt einige Angaben über das "ATS-1 Satellitensystem: Sprachdaten mit $300 \text{ Hz} \leq f \leq 3,4 \text{ kHz}$ werden durch Frequenzmodulation in den Bereich $3,4 \text{ kHz} \leq f \leq 12 \text{ kHz}$ transponiert und anschließend mit einem Pseudo-Noise-Code der Länge 2047 mit der Taktfrequenz 16 MHz in der Phase umgetastet. Das derartig gespreizte Datensignal wird dann einem hochkonstantem HF-Träger (1×10^{-9}) aufmoduliert und übertragen. Im Empfänger wird zur Codesynchronisation ein DLL verwendet, bei dem während des Einlaufvorganges die Taktfrequenz um 500 Hz variiert wird. An gleicher Stelle wird darauf hingewiesen, daß das von der NATO konzipierte taktische Nachrichtensystem JTIDS der 80-er Jahre von der Basis zwar ein Zeitmultiplexsystem sei, trotzdem werden aber Informationen auch mit Frequenzsprung-Code-Multiplextechnik übertragen. Es wird fernerhin erwähnt, daß die Synchronisationsschaltungen für Frequenzsprungverfahren wohl einfacher aufzubauen wären, es aber momentan noch sehr schwierig sei, Frequenzsynthesizer mit den geforderten kurzen Frequenzwechselzeiten

herzustellen. Bei einem solchen System werden einzelne Frequenzen durch Pseudo-Noise-Folgen umgetastet, und hier würde ein Übergang von nur zweiwertigen Folgen auf mehrstufige Codes mit geeigneten AKF und KKF-Eigenschaften ein aussichtsreiches Anwendungsgebiet darstellen.

Unabhängig von den Vorteilen der Codemultiplexsysteme für taktischen Einsatz, wo der höhere Aufwand keine Rolle spielt, werden seit Anfang der 70-er Jahre solche Systeme auch für allgemein benutzbare Nachrichtenübertragungsverfahren angewandt. Herold [30] schlägt z.B. den Einsatz der Codemultiplextechnik für ein Funktelefonsystem bei mobilen Teilnehmern vor. Baier und Meffert [4] untersuchen in ihrem Beitrag den Einfluß der Taktfrequenz f_c für die Spreizungsfolge bezogen auf die zur Verfügung stehende Übertragungsbandbreite. Dabei ist die Basisbandbreite des Signales von 1 MHz auf eine Kanalbandbreite von $B = 50$ MHz zu spreizen.

Es wird das ausgangsseitige Signal-Rauschverhältnis einmal für einen einzelnen Sinusstörer, zum anderen für einen breitbandigen Rauschstörer in Abhängigkeit von $\frac{B}{f_c}$ optimiert. Dabei ergibt sich, daß eine Wahl von $f_c \approx \frac{B}{2}$ bei Einfluß eines Rauschstörers zwar nicht optimal, aber hinreichend brauchbar für einen weiten Bereich verschiedener Signal-Rauschverhältnisse am Empfängereingang ist. Bei reiner Sinusstörung hingegen ist eine wesentliche Verbesserung zu erreichen, wenn die in [4] angegebenen Optimierungskriterien verwendet werden, die in der Tendenz besagen, daß $f_c > \frac{B}{2}$ zu wählen ist.

Ein dominierendes Problem bei der Codemultiplextechnik ist, wie schon einige Male erwähnt, die Synchronisation der Referenzcodeworte auf der Empfangsseite mit den sendeseitig verwendeten Spreizungssignalen, welche dem Datensignal aufgeprägt sind. Üblicherweise wird dazu der DLL verwendet. Allerdings ergeben sich hier speziell bei langen Spreizungscodes (mehrere tausend Bits) Probleme bezüglich der zu lang werdenden Einlaufzeit bei der erstmaligen Synchronisation der beteiligten Empfangssysteme. Um diesen Nachteil zumindest teilweise zu beheben, sind Strukturen vorgeschlagen worden, die von der Ausführung des klassischen DLL abweichen. Baier und Pandit [5] stellen ein Konzept vor

bei dem eine angezapfte Verzögerungsleitung in CCD-Technik als Tracking-Filter verwendet wird. Dabei wird jeweils nur ein Stück aus einer als Spreizungscode verwendeten Pseudo-Noise-Folge verglichen. Beispielsweise wird bei einem Code der Länge $p = 1023$ in einer als Matched-Filter wirkenden Verzögerungsleitung (CCD-Technik) ein Teilstück der Länge $k = 32$ mit dem gesamten Codewort korreliert. Eine Schwierigkeit dieser Systemkonfiguration ist das Erfordernis hochkonstanter Taktgeneratoren zur Erzeugung der PN-Folge auf Sende- und Empfangsseite.

Annecke [3] schlägt ein neues Empfängerkonzept DDCCR (Decision Directed Combined-Carrier-Regeneration) vor, bei dem das Codesignal durch zueinander relativ primen Subcodeworten entsteht. Auf der Empfangsseite werden diese Subcodeworte nach Matched-Filterung getrennt synchronisiert, wodurch sich erhebliche Einsparungen bezüglich der Synchronisationszeit ergeben. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß eine Trennung verschiedener Spreizungscodes $c_v(t)$ im Empfänger entweder durch Matched-Filterung, s. Bild 2.4a oder durch Korrelationsempfang s. Bild 2.4b erfolgen kann. Der wesentliche Unterschied ist, daß beim Korrelationsempfänger das synchrone Referenzsignal $c_1(t)$ zur Verfügung stehen muß, beim Matched-Filter-Konzept hingegen sind die a-priori-Kenntnisse über die Synchronisation auf das gewünschte Codewort $c_1(t)$ beispielsweise in Form der Koeffizienten des Filters $c_1(-t)$ verlangt. Beide Ausführungsformen bilden die Autokorrelationsfunktion des Codewortes $c_1(t)$, wobei die übrigen Folgen $c_{v-1}(t)$ und eventuell vorhandenes Rauschen als Störung für den Optimalfiltervorgang interpretiert werden können.

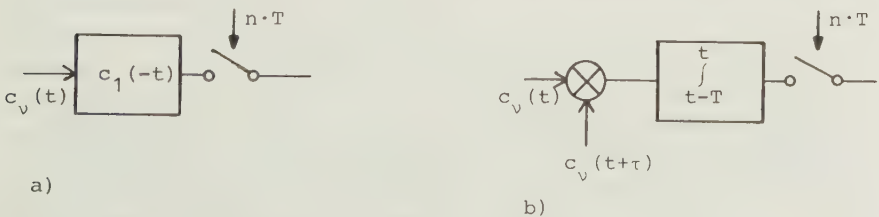


Bild 2.4 a) Matched Filter-Empfang

b) Korrelationsempfang

2.2 Impulsverdichtung von Ortungssignalen

Das Grundprinzip einer passiven Entfernungsmessung mit Hilfe elektrischer Signale besteht darin, einem hochfrequenten Träger eine Signalfunktion $s(t)$ aufzuzumodulieren und diese gerichtet auf gewünschte Ziele auszusenden. Aus der Zeitverzögerung $\hat{T}$ des reflektierten Sendesignals $c(t-\hat{T})-e(t)$ läßt sich durch die Relation $2d=c_0 \cdot \hat{T}$ die Entfernung d schätzen (c_0 ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Träger-schwingung). Eine eventuelle Winkelinformation ist über entsprechend scharfbündelnde Sende- und Empfangsantennen erzielbar. Auf dieses Problem wird im Rahmen aller folgenden Betrachtungen nicht weiter eingegangen. Das folgende Blockschaltbild 2.5 verdeutlicht das Prinzip der Entfernungsschätzung [38].

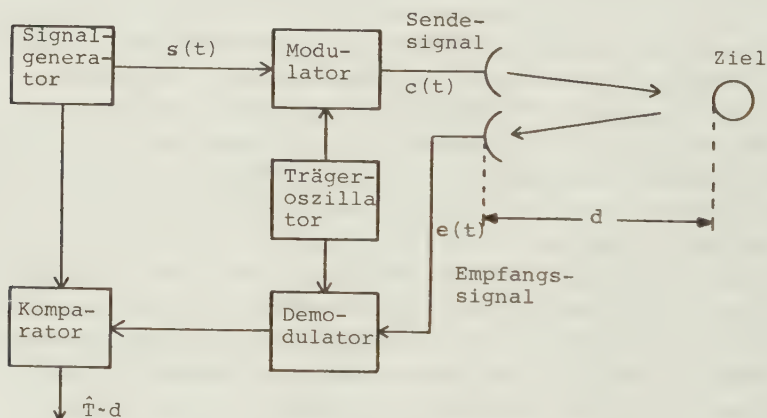


Bild 2.5 Prinzip der Radar-Entfernungsmessung

Beim sogenannten Pulsverfahren (Radar, Sonar) wurde in den Anfängen der Radartechnik als Signalschwingung $s(t)$ eine mit T_p periodische Rechteckfolge mit der Pulsbreite T verwendet s. Bild 2.6. (Teilweise wird diese Schwingungsform auch noch heute bei installierten zivilen Radaranlagen benutzt.)

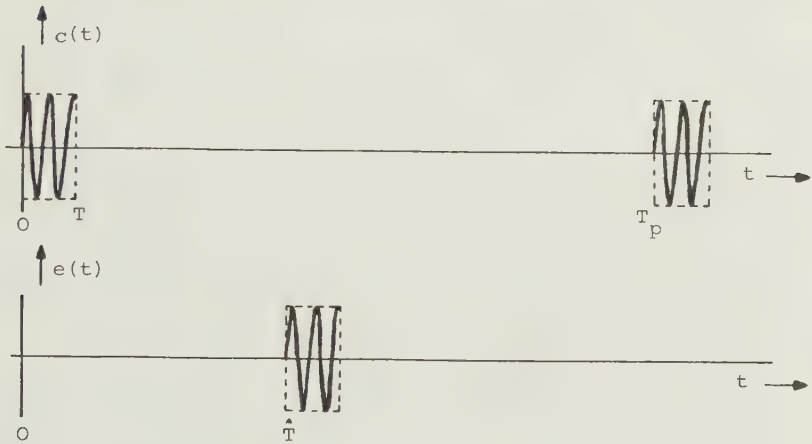


Bild 2.6 Sende- und Empfangssignal einer Pulsradaranlage

Die Entfernungsauflösung Δd , d.h. der Wert, bei dem zwei radial hintereinander liegende Ziele gerade noch getrennt unterschieden werden können, beträgt bei einem solchen System $\Delta d \approx \frac{c_0 \cdot T}{2}$. Wegen ausreichender Entdeckbarkeit ist ein möglichst hohes Signal-Rauschverhältnis am Empfängereingang verlangt, welches durch eine maximal erzielbare Pulsspitzenleistung begünstigt wird. Bei Anlagen mit großer Reichweite ist wegen der Abhängigkeit der Echoleistung mit $\frac{1}{d^4}$ aber bald die tech-

$d_{\max}$

nisch erzielbare Grenze der Sendeimpulsleistung erreicht. Abhilfe würde Vergrößerung der Impulsdauer T schaffen, diese Maßnahme verschlechtert aber die Entfernungsauflösung. Eine Verbesserung sowohl der Trennbarkeit von Zielen als auch eine Herabsetzung der Sendespitzenleistung ist nur möglich durch Anwendung komplizierterer Strukturen für die Signalschwingung $s(t)$ statt der einfachen Rechteckimpulsfolge. Bei Betrachtung des Empfangsvorganges im Basisband ist dieser in Gegenwart von weißen gaußischem Rauschen als Störsignal ein Optimalfilterproblem [65]. In diesem Sinne sind also Signalformen $s(t)$ günstig, die eine Autokorrelierte $R_s(\tau)$ mit großem Hauptmaximum und kleinen Nebenmaxima besitzen. Bei gleichen Werten der

Sendeimpulsdauer T , der Signalenergie $\int s^2(t)dt$ und damit gleicher Varianz $\sigma_{\hat{T}}^2$ [44]

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = \frac{T \cdot N_0}{4B \cdot \int_0^T s^2(t)dt} \quad (2.1)$$

läßt sich die Auflösung Δd nur durch "Verbesserung" der AKF erreichen, d.h. diese muß ein schmaleres Hauptmaximum als die AKF von Rechteckimpulsen besitzen. In der Gl. (2.1) bedeuten N_0 die am Empfängereingang anstehende Rauschleistungsdichte, B die Empfangsfilterbandbreite und T_0 mit $T_0 = N \cdot T$ die Zielbeobachtungszeit mit der "Trefferzahl" N . Dazu sind in den letzten 20 Jahren zwei verschiedene Möglichkeiten bekannt geworden: Das erste Verfahren erzielt durch lineare Frequenzmodulation der Trägerfrequenz, mit sogenannten Chirp-Signalen, eine Impulsverdichtung oder Impulskompression der Video-Nutzsignale [1, 46]. Dabei wird mit dispersiven Laufzeitverzögerungssystemen eine im Spektralbereich des Sendepulses notwendig lineare Laufzeitcharakteristik, d.h. quadratische Phasenabhängigkeit erreicht. Das erforderliche Empfangsfilter hat entsprechend der Optimalfiltertheorie den zum Sendefilter inversen Frequenzgang. Eine quadratische Phasenabhängigkeit über einen größeren Frequenzbereich kann nur approximativ erzielt werden. Achilles beschreibt in [1] Entwurfsverfahren für höhergradige Allpässe, die in einem vorgebbarem Intervall die gewünschte Phasenabhängigkeit besitzen. Verläuft die Einhüllende des Sendesignals rechteckförmig, so entstehen durch die $\frac{\sin x}{x}$ -Funktion als Fouriertransformierte der Rechteckfunktion im Frequenzbereich relativ große Nebenmaxima. Abhilfe schafft eine andere Form der Hüllkurve. Beispielsweise ergibt ein glockenförmiger Verlauf auch im Frequenzbereich einen gleichartigen Verlauf des Spektrums, da die Gaußsche Glockenfunktion invariant bezüglich der Fouriertransformation ist [1]. Zecha gibt in [78] als annähernd optimales Ortungssignal das sogenannte "getaperte" frequenzmodulierte Signal $s(t)$ an, s. Bild 2.7.

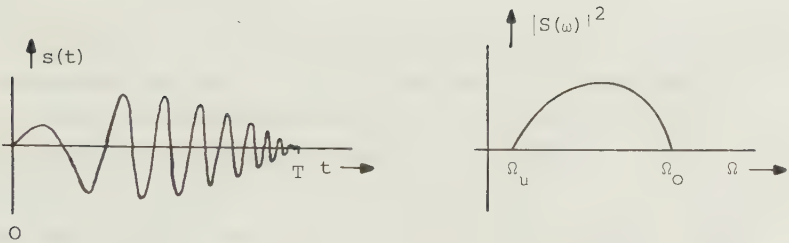


Bild 2.7 Getapertes frequenzmoduliertes Ortungssignal

Die zweite Möglichkeit, bei gleicher Sendeimpulsdauer T und gleicher Spitzenleistung das Entfernungsaufhebungsvermögen zu verbessern, besteht darin, den Rechtecksendeimpuls geeignet in p Subimpulse der Dauer T_C zu unterteilen, derart daß das codierte "Segment" mit $p \cdot T_C = T$ ein schmaler verlaufendes AKF-Hauptmaximum als der Rechteckimpuls der Dauer T erhält. Bild 2.8 verdeutlicht das im Video-Bereich für einen Barker-Code der Länge $p = 7$ als Segment-Codierung [41].

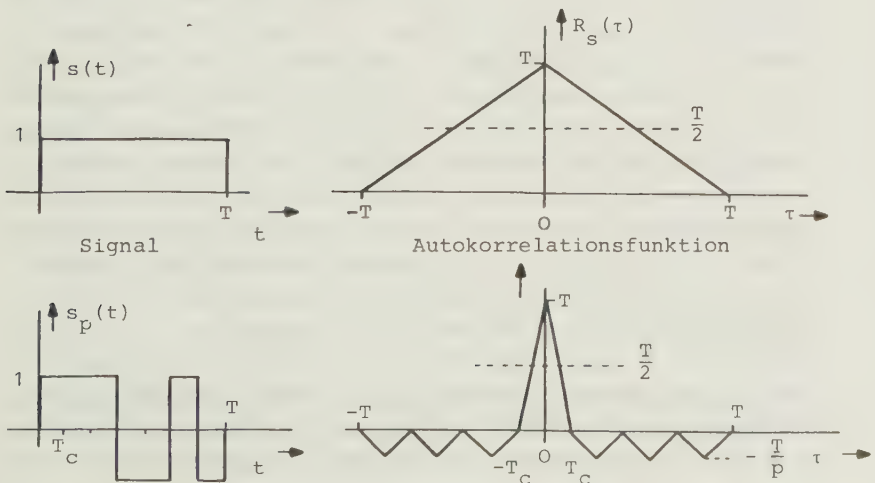


Bild 2.8 Signal und AKF für einen Einzelrechteckimpuls und für ein codiertes Segment gleicher Länge

Legt man die Entscheidungsschwelle darüber, ob ein Ziel vorhanden ist oder nicht auf halbe Höhe des Hauptmaximums der AKF, so erhöht sich bei gleicher Sendesignalenergie $\int_0^T s^2(t) dt$ das Entfernungsauflösungsvermögen bei geeigneter Codierung um den Faktor p . Das wird allerdings mit einem höheren Bandbreitenbedarf des Signals erkaufte. Der Einzelrechteckimpuls hat ein mit $(\frac{\sin x}{x})^2$ verlaufendes Energiedichtespektrum mit dem Maximalwert T^2 und der ersten Nullstelle bei $f_0 = \frac{1}{T}$. Das codierte Signal hingegen besitzt zwar den gleichen $\text{si}^2 x$ -Verlauf, das Maximum reduziert sich aber auf $\frac{T^2}{p}$ und die 1. Nullstelle wandert zu $f_0 = p \cdot \frac{1}{T}$, d.h. durch die Codierung ist das Sendesignal spektral gespreizt worden, wobei die Energiedichte verkleinert wurde. Insofern bestehen also große Ähnlichkeiten mit dem Codemultiplexverfahren. Ebenso wird die Störsicherheit gegenüber Fremdstörern, die keine Kenntnis über die Segment-Codierungsvorschrift besitzen, erhöht. Ein Nachteil ist, daß es bis heute nicht gelungen ist und wahrscheinlich auch nicht gelingen wird, sogenannte Barker-Folgen mit $-1, 1$ -Elementen und größerer Länge als 13 zu finden. Es existieren Barker-Folgen der Länge $p = 3, 4, 5, 7, 11, 13$ [6]. Allerdings ist es möglich, bei Erweiterung auf mehrstufige Folgen, d.h. $a_v \in \mathbb{R}$, Segmentcodierungen bei vorgegebener AKF mit den Barker-Eigenschaften für beliebige Längen p anzugeben [36]. Die Synthese solcher Codes wird noch geschildert. Generell sind also Segmentcodierungen interessant, welche eine AKF mit möglichst großem schmalem Hauptmaximum und sehr kleinen (möglichst gleichgroßen) Nebenmaxima besitzen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß sich sogenannte Pseudo-Noise-Folgen maximaler Länge [66], welche auch nur für Längen $p = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ existieren, für die Codierung von Pulsradaranlagen nicht eignen. Diese Behauptung sei durch das folgende Bild 2.9 verdeutlicht. Die hier dargestellte PN-Folge $s_{\text{PN}}(t)$ ergibt nach zyklischem Shift um $2T_c$ nach links und Zeitinversion übrigens genau die in Bild 2.8 dargestellte Barker-Folge. Der Zusammenhang gilt leider nur für die $p = 7$ Pseudo-Noise-Codierung.

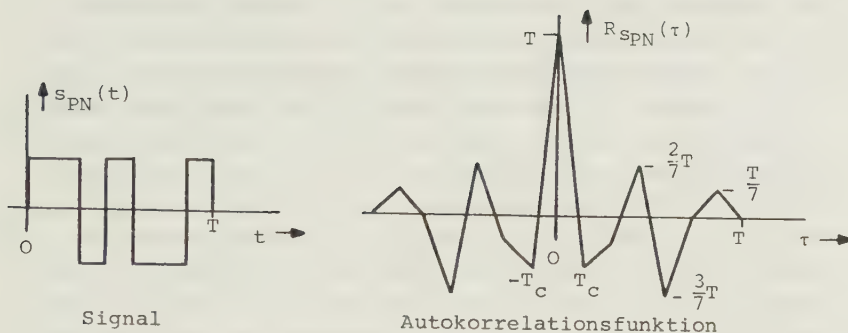


Bild 2.9 Pseudo-Noise-Folge mit $p = 7$, $T = 7 \cdot T_C$, und Segment-AKF

Die AKF der dargestellten PN-Folge hat ein Haupt-Nebenmaximumsverhältnis von $\frac{7}{3}$ im ungünstigsten Fall, während die Barker-Folge gleicher Länge 7 erreicht. Für längere PN-Folgen wird das Verhalten der Segment-AKF kaum besser. Allerdings wird eine Codierung mit maximal langen PN-Folgen für Ortungsanlagen wieder interessant, wenn das Signal $s(t)$ durch periodische Fortsetzung des codierten Einzelsegmentes mit der Periodenzeit $T_p = p \cdot T_C$ erzeugt wird. Dieser Quasi-CW-Betrieb eignet sich dann aber vorwiegend für eine Einzelzielverfolgung. In diesem Falle entsteht eine zweiwertige periodische AKF durch Überlagerung der Segment-Autokorrelationsfunktionen des codierten Einzelsegmentes. Aber auch hier sind Verbesserungen bezüglich der Höhe der Nebenmaxima, die man alle zu Null erzwingen kann, möglich, s. [37] und Kapitel 5. Es sei noch erwähnt, daß die AKF bis auf die Bewertung mit einem konstanten Faktor der Segment-AKF gleich ist, wenn man die Einzelsegmente derart periodisch wiederholt, daß $T_p \geq 2T$ ist. Dann findet keine gegenseitige Beeinflussung der Segment-Autokorrelierten statt.

Eine Reduzierung der Nebenzipfel der Segment AKF bei Pulsradaranlagen mit Barker-codierten Subpulsen ist auch dadurch möglich, daß das Empfangsfilter als sogenanntes Mismatched-Filter ausgeführt wird.

Untersuchungen in dieser Richtung sind in [51], [67], [68] zu finden. Das Filter besteht aus einem auf die rechteckigen Subpulse angepaßten Matched-Filter und einem nachgeschalteten Laufzeitkettenfilter mit einem Grad $N \geq p$.

Die Minimisierung aller Nebenzipfel des Ausgangssignals erfolgt über die "gleichmäßige Approximation" und liefert die Koeffizienten des Transversalfilters, dessen Länge zwischen der maximal verwendeten Codelänge $p = 13$ (Barker-Code) und dem Vierfachen davon liegt.

Kosel [34] beschreibt ein Verfahren zur Minimisierung der Nebenmaxima der Kreuzkorrelierten zwischen Signal- und Referenzcode, wobei beide gleiche Länge mit $p \geq 13$ haben und nur der Signalcode mit $a_v \in [-1, 1]$ vorgeschrieben ist, während der Referenzcode mehrstufig sein kann. Es wird ein Code mit $p = 23$ vorgestellt, bei dem die KKF mit einem mehrstufigen Referenzcode ein Haupt-Nebenmaximumsverhältnis von 14,65 erreicht.

Bisher wurde nur von Verbesserungen der Auflösung bei Radaranlagen gesprochen, d.h. von Systemen bei denen der Übertragungskanal der als homogen angenommene freie Raum ist. Probleme wie Festzielunterdrückung und Dopplerfrequenzverschiebung bleiben hier außer Betracht, sie würden den gespannten Rahmen sprengen. Um ein Vielfaches komplizierter werden die Beschreibungsmöglichkeiten von Ortungsanlagen und geeigneten Signalen, wenn auch das Übertragungsmedium stark inhomogen wird. Das ist beispielsweise bei Unterwasserortungssystemen (SONAR-Anlagen) der Fall. Aber auch hier gelten die durch geeignete Signalcodierung prinzipiell erreichbaren Verbesserungen, wie Barnick in [7] zeigt.

Zum Abschluß der Betrachtungen über die Möglichkeit, mittels geeigneter Signalcodierung eine Impulsverdichtung zu erreichen, wird noch ein interessantes von Rudershausen [56] angegebenes Syntheseverfahren geschildert, welches auf Überlegungen basiert, die "zwischen" der Codierung mit Chirp-Signalen (lineare Frequenzmodulation) und einer $-1, 1$ Codierung des Video-Signales liegen.

Rudershausen vergleicht die quadratische Phasenänderung eines Chirp-Signales mit der diskreten Änderung der Phase bei den optimalen zweiwertigen Barker-Codes über eine gleiche Gesamtphasenänderung. Dabei wird jedesmal, wenn sich das zweiwertige Codesignal ändert, die Gesamtphase um π erhöht.

Für den Fall des $p = 13$ -Barker Codes wird das Verfahren mit Bild 2.10 näher erläutert.

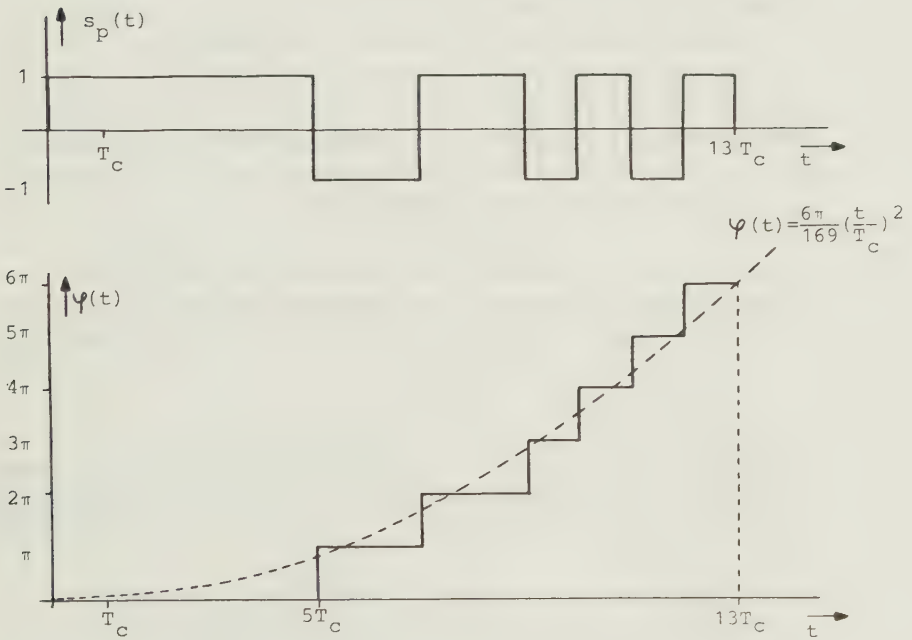


Bild 2.10 Barker-Code mit diskreter Phasenänderung und Phase eines Chirp-Signales

Für eine Länge von $p = 47$ wurde nach diesem Verfahren ein zweiwertiger Code für eine Radaranlage synthetisiert. Allerdings liegt hierbei das größte Nebenmaximum etwa noch bei 10% vom Hauptmaximum. Durch Hamming-Fensterbewertung des Energiedichtespektrums lassen sich die Nebenmaxima weiter minimisieren. In der Arbeit [56] wird ein nach dieser Methode gefundener 8-stufiger Code der Länge $p = 201$ vorgestellt, bei dem die größten Nebenmaxima nur noch etwa 3% des Hauptmaximums betragen.

2.3 Der Delay-Locked-Loop (DLL)

2.3.1 Das Basisband-Modell (Video-Korrelation)

Soweit bekannt, ist erstmals von Spilker und Magill 1961 eine dem Phased Locked Loop ähnliche Regelschaltung für breitbandige Signalklassen vorgestellt worden [69].

Bild 2.11 zeigt in Anlehnung an die damals vorgeschlagene Struktur ein Blockschaltbild des Gesamtsystems.

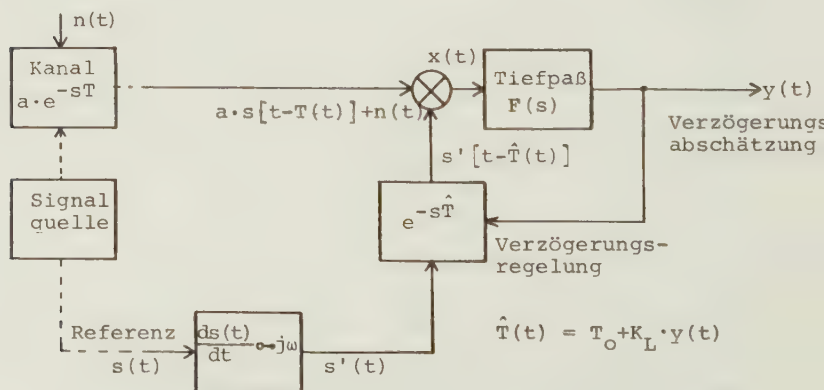


Bild 2.11 Tracking-System mit DLL

Dabei muß die Signalquelle nicht notwendigerweise Breitbandsignale mit periodischer Struktur erzeugen [69]. Die regelbare Verzögerungsleitung $H(s) = e^{-s\hat{T}}$ wurde als Ultraschallsystem ausgebildet und stellte neben dem idealen Differenzierer das Hauptproblem bei der Realisierung dar. Heute läßt sich eine in wesentlich größeren Bereichen regelbare Verzögerungszeit einfacher durch CCD-Schaltungen oder digitale Verzögerungsleitungen erreichen. In dem dargestellten System bildet der Multiplizierer in Verbindung mit dem nachgeschalteten Tiefpaß $F(s)$ die Kreuzkorrelierte zwischen dem durch den Kanal gedämpften und um $T(t)$ verzögerten Sendesignal $s(t)$, welches gegebenenfalls durch weißes Rauschen $n(t)$ zusätzlich gestört ist, und dem um den Schätzwert $\hat{T}(t)$ verzögertem und differenziertem Sendesignal. Der Regelkreis bildet den Schätzwert $\hat{T}(t)$ im statistischen Entscheidungssinne [69] optimal. Für den Mittelwert der Regelspannung zur Verzögerungsregelung gilt:

$$\overline{x(t)} = E\{ \langle a \cdot s[t-T(t)] + n(t) \rangle \cdot \langle s'[t-\hat{T}(t)] \rangle \} .$$

Bei statistischer Unabhängigkeit von $n(t)$ und $s'(t)$ und bei Mittelwertfreiheit des Rauschens vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\overline{x(t)} = a \cdot E\{ s(t-T) \cdot s'(t-\hat{T}) \} .$$

Mit der Substitution $t-T = \alpha$ und der Verzögerungsdifferenz $\epsilon = T-\hat{T}$ ergibt sich die einfache Form

$$\overline{x(t)} = a \cdot E\{ s(\alpha) \cdot s'(\alpha+T-\hat{T}) \} = a \cdot R_{ss'}(\epsilon) .$$

Um eine Beziehung zu der AKF der verwendeten Signalform herzustellen, wird die Definitionsgleichung für die Autokorrelierte $R_s(\epsilon)$ nach der Variablen ϵ differenziert. Per Definition gilt für die AKF [58]

$$R_s(\epsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) \cdot s(t+\epsilon) dt$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_s(\epsilon)}{d\epsilon} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T s(t) \cdot \frac{ds(t+\epsilon)}{d(t+\epsilon)} \cdot \frac{d(t+\epsilon)}{d\epsilon} \cdot dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T s(t) \cdot s'(t+\epsilon) \cdot 1 \cdot dt = R_{ss'}(\epsilon) \\
 \overline{x(t)} &= a \cdot R_{ss'}(\epsilon) = a \cdot \frac{dR_s(\epsilon)}{d\epsilon} \stackrel{!}{=} a \cdot A(\epsilon) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Hierbei sei $A(\epsilon)$ die Diskriminatorkennlinie des Kreises. Da diese durch Differentiation der AKF (gerade Funktion) des verwendeten Signaltyps entsteht, ist $A(\epsilon)$ eine in ϵ ungerade, durch den Nullpunkt verlaufende Funktion. Dies ist für den Regelkreis, der zwischen positivem und negativem ϵ unterscheiden muß, erforderlich. An dieser Stelle ist eine erste Analogie zum Phase Locked Loop-Kreis festzustellen. Verwendet man als Signalfunktion $s(t) = \sin \omega_0 t$, d.h. eine unmodulierte Trägerschwingung, so erhält man die zugehörige AKF [57] zu

$$R_s(\epsilon) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \epsilon \quad .$$

Mit Gl. (2.2) wird $\overline{x(t)} = \frac{-a\omega_0}{2} \cdot \sin \omega_0 \epsilon$ die periodische vom PLL her bekannte Phasendiskriminatorkennlinie [11], [43], [44] gewonnen.

Um die für Ortungsvorgänge ungeeignete periodische Regelkennlinie (wegen Vieldeutigkeiten) hinreichend "aperiodisch" zu machen, ist es also erforderlich, das Signalspektrum von $s(t)$ zu spreizen, d.h. man ist gezwungen, breitbandige Signalklassen zu verwenden.

Die in Bild 2.11 für die Regelung von $\hat{T}$ verwendete Größe $x(t)$ ist nun nicht allein durch Gl. (2.2) bestimmt, diese beschreibt nur den Gleichanteil; vielmehr entstehen durch die Faltung von $j\omega \cdot S(j\omega)$ mit $S(j\omega)$ höherfrequente Anteile, die der Tiefpaß $F(j\omega)$ nicht vollständig unterdrücken kann, und die bei breitbandigen Signaltypen rauschähnlichen Charakter haben. Sie seien durch $n_g(t)$ (Eigenrauschen) repräsentiert. Außerdem ist ein vom Kanalrauschen $n(t)$ abhängiger Term $n_n(t)$ (Faltung mit $j\omega \cdot S(j\omega)$) vor-

handen. Die das regelbare Verzögerungsglied treibende Spannung kann somit durch

$$y(t) = x(t) * \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = a \cdot A(\epsilon) + [n_n(t) + n_e(t)] * \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

formal angegeben werden. Die Bestimmung der Störterme ist hier wesentlich schwieriger als beim PLL.

Teilweise ist eine geschlossene Darstellung, um beispielsweise die Varianz von ϵ bzw. $\hat{T}$ bei Rauscheinfluß zu berechnen, nicht möglich.

Zur weiteren Analyse des angesprochenen Systems wird auf [69] verwiesen.

Bereits 2 Jahre später stellte Spilker in [70], allerdings für die spezielle Signalform von Pseudo-Noise-Folgen eine einfachere Form des DLL vor, die bis heute noch als Grundstruktur angewandt wird. Sie vermeidet die ideale Differentiation und die variable Verzögerungsleitung. In Bild 2.12 ist das System dargestellt.

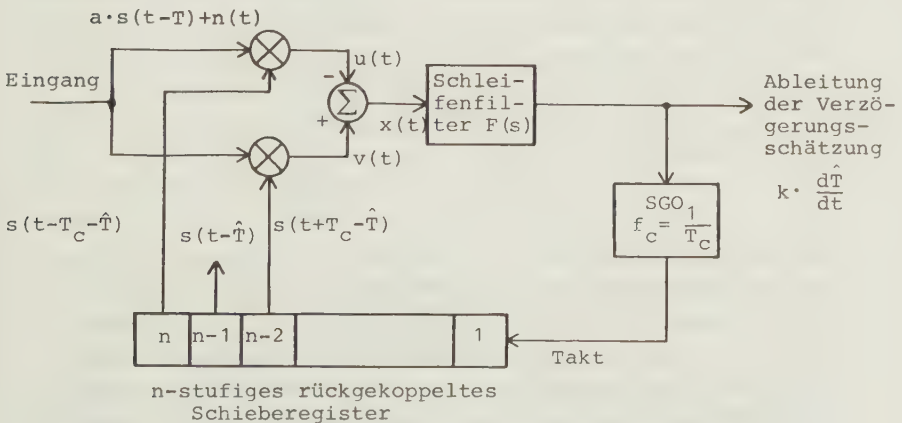


Bild 2.12 "2- T_c -Verzögerungs DLL"

Die für Bild 2.12 gewählte Bezeichnung nimmt Bezug auf die Tatsache, daß zwei um 2 Taktzeiten T_C zueinander verschobene Referenzsignale verwendet werden. Der spannungsgesteuerte Oszillator SGO erzeugt einen Takt der Mittenfrequenz $f_C = \frac{1}{T_C}$. Die Frequenz kann durch die zugeführte Regelspannung (Ausgang des Schleifenfilters) in einem gewissen Bereich geändert werden. Das n -stufige Schieberegister erzeugt eine $p = 2^n - 1$ lange PN-Folge mit der Chipbreite T_C , wobei die Rückkopplungsart die gleiche sein muß, wie sie das Register zur Erzeugung des empfangenen Signals besitzt (a-priori-Kennntnis, Schlüssel). In Abwesenheit des weißen Störgeräusches ergibt sich für den Gleichanteil der den SGO steuernden Größe:

$$\begin{aligned}\overline{x(t)} &= E\{a \cdot s(t-T) s(t+T_C-\hat{T}) - a \cdot s(t-T) \cdot s(t-T_C-\hat{T})\} \\ &= a \cdot [R_S(\epsilon+T_C) - R_S(\epsilon-T_C)]\end{aligned}\quad (2.3)$$

mit $\epsilon = T - \hat{T}$, der Verzögerungsdifferenz.

Der Mittelwert der Steuerspannung besteht also aus der Differenz zweier um je $\pm T_C$ zueinander verschobener Autokorrelationsfunktionen der verwendeten Signalform. Hat die verwendete PN-Folge Einzelelemente $a_v \in \{-1, 1\}$, so ergibt sich die zugehörige periodische AKF [38], [66] zu:

$$R_S(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1 + \frac{1}{p}}{T_C} \cdot |\tau| & \text{für } |\tau| \leq T_C \\ -\frac{1}{p} & \text{für } T_C \leq |\tau| \leq (p-1)T_C \end{cases} \quad (2.4)$$

Sie ist also im Gegensatz zur im Bild 2.9 dargestellten Segment-AKF periodisch mit $p \cdot T_C$ und nähert sich mit wachsender Länge p immer mehr der AKF einer echten $-1, 1$ -Zufallsfolge. Bild 2.13 zeigt das Zustandekommen von $\overline{x(t)} = a \cdot A(\epsilon)$ durch Überlagerung zweier nach Gl. (2.4) beschreibbarer verschobener Autokorrelationsfunktionen, wobei die Variable τ durch ϵ ersetzt wird.

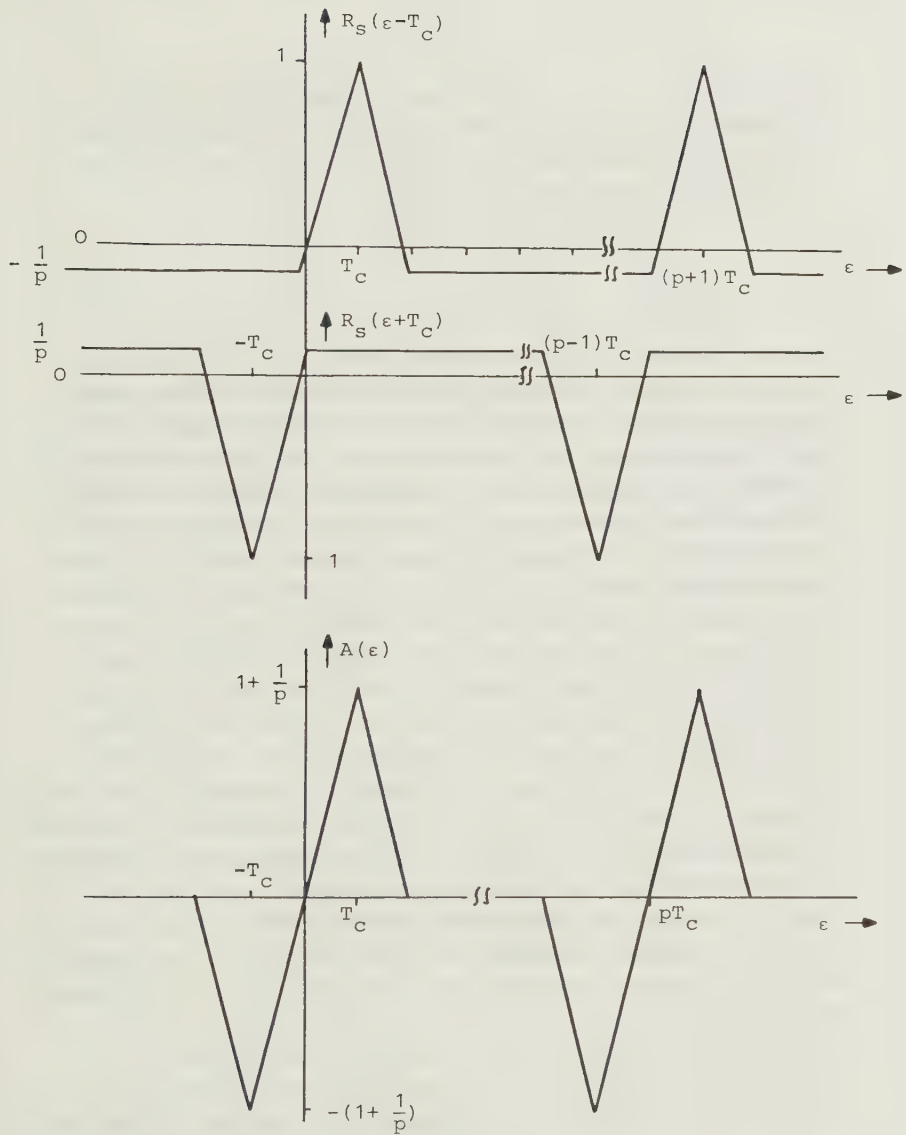


Bild 2.13 Zur Entstehung der ungeraden Diskriminator-
kennlinie

Offenbar ist die Kennlinie linear im Bereich $-T_C \leq \epsilon \leq T_C$ und ungerade, wie es zur Unterscheidung von positiven und negativen Werten erforderlich ist. Die Steigung im linearen Arbeitsbereich beträgt:

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{p+1}{p \cdot T_C} \quad . \quad (2.5)$$

Auch bei diesem DLL-Typ entstehen neben dem Gleichanteil in der Regelspannung noch ein vom Kanalrauschen herrührender Term und ein Term, welcher durch die Multiplikation der beiden Referenzsignale mit dem Nutzanteil $s(t)$ im Empfangssignal entsteht. Die letztgenannte Störgröße ist am schwierigsten zu bestimmen, da zwei durch ϵ statistisch abhängige Signalanteile korreliert werden. Für den Fall idealer, d.h. nicht bandbegrenzter PN-Folgen allerdings lassen sich die Teilleistungsspektren bzw. die Korrelationsfunktionen nach den beiden Multiplikationen geschlossen angeben. Sind die jeweils multiplizierten Folgen ganzzahlig mit μ im Raster $\mu \cdot T_C$ zueinander verschoben, so kann man von der "Shift-and ADD"-Eigenschaft Gebrauch machen [66], die besagt, daß das Produkt (hier identisch mit einer mod-2-Addition) wieder eine PN-Folge gleicher Struktur, aber anderer, nicht so einfach zu bestimmender Verschiebung ist. Die AKF bzw. das entstehende Leistungsdichtespektrum ist also erhalten geblieben.

Sind die beiden multiplizierten Folgen nicht im ganzzahligen Raster zueinander verschoben, so ist nach Gill u. Spilker [24] ebenfalls eine geschlossene Lösung für die AKF des Produktes angebar:

Für $m(t, \delta) = s(t) \cdot s(t+\delta)$ ist mit $s(t) \in \{-1, 1\}$ auch $m(t, \delta) \in \{-1, 1\}$, und es läßt sich zerlegen in $m(t, \delta) = p(t) + r(t)$. Die Teilfolge $p(t)$ ist dabei periodisch mit T_C und zweiwertig mit $p(t) \in \{0, 1\}$. Der zweite Summand $r(t)$ ist dreiwertig mit $r(t) \in \{-1, 0, 1\}$ und hat die gleiche Pseudo-Zufallsstruktur $s(t)$ mit der Periode $p \cdot T_C$. Das Leistungsdichtespektrum ist dann nach [24]:

$$\begin{aligned}
S_m(f, \delta) &= \left[1 - \frac{\delta}{T_c} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right]^2 \cdot \delta_o(f) \\
&+ \left(\frac{\delta}{T_c} \right)^2 \cdot \left[\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \text{si}^2 \frac{\pi \cdot n \cdot \delta}{T_c} \cdot \delta_o \left(f + \frac{n}{T_c} \right) \right. \\
&\left. + \frac{p+1}{p^2} \cdot \text{si}^2 \frac{\pi \cdot n \cdot \delta}{p \cdot T_c} \cdot \delta_o \left(f + \frac{n}{p T_c} \right) \right].
\end{aligned}$$

Beträgt die Verschiebung beider Folgen mehr als T_c im nicht ganzzahligen Raster, wie es bei den Teilprodukten für die Bildung von $x(t)$ des Systems in Bild 2.12 erforderlich ist, so läßt sich nach [24] ebenfalls die AKF bzw. das Leistungsdichtespektrum der Signale $u(t)$ und $v(t)$ angeben. Allerdings ist damit die AKF von $x(t)$ aus folgenden Gründen noch nicht bestimmbar (Bezug zu Bild 2.12, $n(t) = 0$, $a=1$):

$$u(t) = s(t-T) \cdot s(t-T_c-\hat{T})$$

$$R_u(\tau, \epsilon) = E\{u(t)u(t+\tau)\} \quad \text{berechenbar nach [24]}$$

$$v(t) = s(t-T) \cdot s(t+T_c-\hat{T})$$

$$R_v(\tau, \epsilon) = E\{v(t)v(t+\tau)\} \quad \text{berechenbar nach [24].}$$

Für die nachfolgende Subtraktion gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
x(t) & = & v(t) & - & u(t) & \text{bzw. im Fourier-Bereich} \\
\circ & & \circ & & \circ & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & \\
X(j\omega) & = & V(j\omega) & - & U(j\omega) &
\end{array}$$

und für das Leistungsdichtespektrum $S_x(\omega) = X(j\omega) \cdot X^*(j\omega)$

$$= [V(j\omega) - U(j\omega)] \cdot [V^*(j\omega) - U^*(j\omega)]$$

$$S_x(\omega) = S_v(\omega) + S_u(\omega) - U(j\omega) \cdot V^*(j\omega) - V(j\omega) U^*(j\omega)$$

Durch Fourierrücktransformation erhält man die AKF von $x(t)$ [58]

$$R_x(\tau, \epsilon) = R_v(\tau, \epsilon) + R_u(\tau, \epsilon) - R_{uv}(\tau, \epsilon) - R_{vu}(\tau, \epsilon)$$

In dieser Beziehung sind die beiden letzten Terme nur über Kenntnis 4. Momente bestimmbar, wobei eine Lösung anscheinend bis heute nicht bekannt ist. Da im Rahmen dieser Arbeit die angeführte Struktur auch nicht weiter untersucht werden sollte, s. [12], [18], [23] wurde auf weitere Betrachtung verzichtet. Es sei nur eine Beziehung für die Leistung des reinen Wechselanteils von $x(t)$ in Abhängigkeit von ϵ angegeben, wobei wieder die Bezeichnungen des Bildes 2.12 verwendet werden ($n(t) \equiv 0$, $a \neq 1$).

$$u(t) = a \cdot s(t-T) \cdot s(t-T_c - \hat{T})$$

$$u^2(t) = a^2 \quad \forall T, T_c, \hat{T} \quad .$$

Die Gesamtleistung ergibt sich durch Mittelung über eine Periode des Produktes zu:

$$\overline{u^2(t)} = \frac{a^2}{p} \cdot p = a^2 \quad .$$

Ebenso wird für den 2. Zweig erhalten:

$$v(t) = a \cdot s(t-T) \cdot s(t+T_c - \hat{T}); \quad \overline{v^2(t)} = a^2 \quad .$$

Für die Subtraktion der beiden Signale $u(t) - v(t) = x(t)$ gilt im Leistungsbereich (Erhaltung der Energie):

$$\overline{x^2(t)} = \overline{u^2(t)} + \overline{v^2(t)} = 2a^2 \quad .$$

Wird dieser Ausdruck in den Gleichanteil $\overline{x(t)}^2$ und einen reinen Wechselanteil $M(\epsilon)$ zerlegt, so gilt unter der Berücksichtigung, daß $\overline{x(t)}^2$ das Quadrat der Diskriminatorkennlinie beschreibt mit Gl. (2.2):

$$M(\epsilon) = 2a^2 - a^2 \cdot A^2(\epsilon) = a^2 [2 - A^2(\epsilon)] \quad (2.6)$$

Mit den aus Bild 2.13 entnommenen Größen wird für das $2-T_C$ -Verzögerungsmodell die von der normierten Verstärkung $y = \frac{\epsilon}{T_C}$ abhängige Störleistung:

$$M(y) = a^2 \cdot \begin{cases} 2 - \left(\frac{p+1}{p} y\right)^2 & \text{für } |y| \leq 1 \\ 2 - \left[\frac{p+1}{p} (2 - |y|)\right]^2 & \text{für } 1 \leq |y| \leq 2 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Bild 2.14 zeigt den Verlauf des Effektivwertes $\sqrt{M(y)}$ im Vergleich mit dem Gleichanteil $a \cdot A(\epsilon) = \overline{x(t)}$ für eine Folgenlänge der PN-Folge mit $p = 31$.

Ebenfalls im Jahre 1966 stellte Gill [23] unter anderem ein dem Bild 2.12 ähnliches System vor, wobei die beiden Referenzsignale zueinander nur um T_C verschoben sind. Dieses Modell, fortan "1- T_C -Verzögerungs-DLL" genannt, erreicht ein um 3 dB besseres S/N-Verhältnis, was in erster Linie durch die im Arbeitsbereich doppelt so steil verlaufende Diskriminatorkennlinie zu erklären ist. Sie entsteht durch die nur um insgesamt T_C gegeneinander verschobenen Teil-Autokorrelationsfunktionen und repräsentiert die steilste bis jetzt bekannte Regelkennlinie. Bild 2.15 zeigt diese Charakteristik mit dem Effektivwert des Wechselanteiles.

Die Steilheit bei dieser Form des DLL beträgt im linearen Teil

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = 2 \frac{p+1}{pT_C} \quad (2.8)$$

also das Doppelte gegenüber des $2-T_C$ -Modelles. Wie aber noch im 3. Kapitel gezeigt wird, läßt sich mit einer neuen analogen Struktur ein noch größerer Wert erreichen.

In [23] wird für den "1- T_C -Verzögerungs-DLL" sowohl ein äquivalentes Blockschaltbild für die Regelgröße $\hat{T}$ angegeben, als auch die normierte Varianz $\sigma_{\hat{T}}^2$ von $\hat{T}$ in Abhängigkeit des Kanalrauschens $n(t)$ und der Kreisparameter berechnet. Aus dem

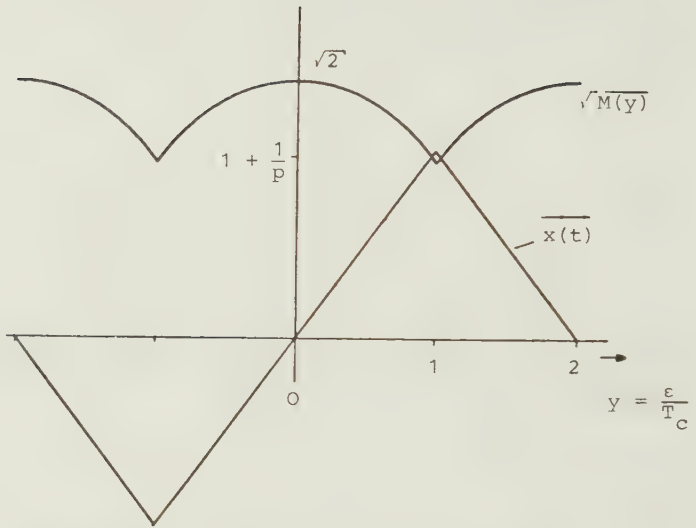


Bild 2.14 Gleich- und Wechselanteil von $x(t)$

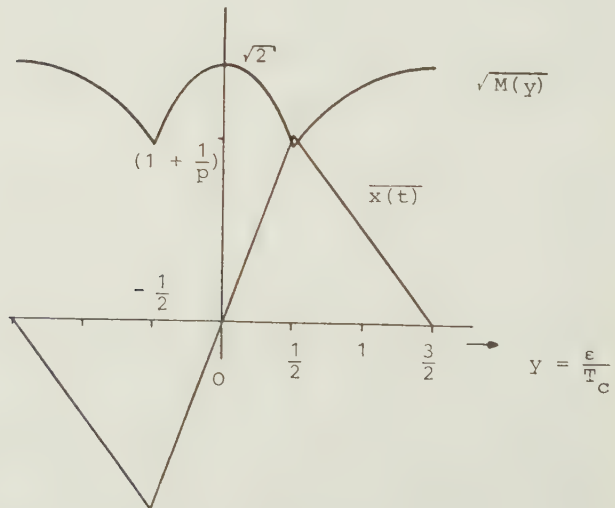


Bild 2.15 Gleich- und Wechselanteil von $x(t)$
beim "1- T_C -Verzögerungs-DLL"

entwickelten Blockschaltbild, s. Bild 2.16, mit der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $G(s)$ wird das für rampenförmigen Verlauf der Verzögerung $T(t)$ annähernd optimale Schleifenfilter $F(s)$ als passives PI-Glied, wie es vom PLL für einen Frequenzsprung bekannt ist [11], ermittelt.

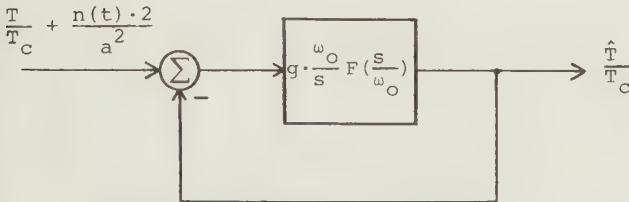


Bild 2.16 Regelkreis für den Schätzwert der Verzögerung $\hat{T}$

Im dargestellten System bedeuten: ω_0 = Eigenfrequenz, $g = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{s}{s} =$ Gesamtverstärkungsfaktor des offenen Kreises, $F(s)$ = Schleifenfilter. Für

$$G\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \frac{g \cdot \frac{\omega_0}{s} \cdot F\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}{1 + g \frac{\omega_0}{s} \cdot F\left(\frac{s}{\omega_0}\right)} \stackrel{!}{=} \frac{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{s}{\omega_0}}{1 + \sqrt{2} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

wird die angesprochene Optimierung erreicht, was bei genügend großem g näherungsweise durch ein Schleifenfilter mit

$$F\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \frac{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{s}{\omega_0}}{1 + g \cdot \frac{s}{\omega_0}}$$

erreicht wird. Die Korrespondenz mit einem passiven PI-Glied

$$\text{der Form } F(s) = \frac{1+sR_2C}{1+sC(R_1+R_2)} = \frac{1+sT}{1+s\frac{T}{m}} \quad \text{s. [11] und Bild 2.17}$$

ergibt:

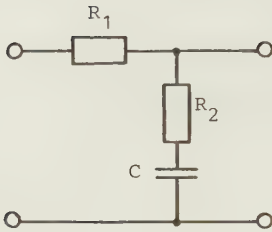


Bild 2.17 Passives PI-Glied

$$\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} = T = R_2 C ; g \cdot m = \omega_0 \cdot T = \sqrt{2} ; \frac{1}{m} = 1 + \frac{R_1}{R_2} .$$

Bei Verwendung von -1, 1-Folgen wird die normierte Varianz [23] zu

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_T}{T_C} \right)^2 = \frac{N_0 \cdot B_n}{2} \quad (2.9)$$

wobei $\frac{N_0}{2}$ die spektrale Leistungsdichte des als weißes Gaußsches Rauschen angenommenen Eingangsrauschens ist, und B_n die äquivalente Rauschbandbreite des DLL bedeutet.

$$B_n = \int_0^{\infty} \left| G\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 \cdot df .$$

In der Praxis wird eine zu synchronisierende PN-Folge nicht im Basisband, d.h. videofrequent übertragen werden können, vielmehr ist Modulation mit einer höherfrequenten Trägerfrequenz erforderlich. Trotzdem sind sämtliche DLL-Schaltungen, die im Basisband arbeiten, für eine derartige Signalübertragung relevant, wie das folgende Blockschaltbild 2.18 erläutert.

Der PLL übernimmt die Abwärtsmischung des Signals $s(t-T)$ ins Basisband. Für $\hat{\phi} = \phi$ (phasengerastet) sind für den nachgeschalteten DLL die vorher aufgeführten Betrachtungen gültig.

Das durch Bild 2.12 vorgestellte DLL-Modell und die entsprechende Verbesserung in Form der $1-T_C$ -Verzögerungs-Regelschleife

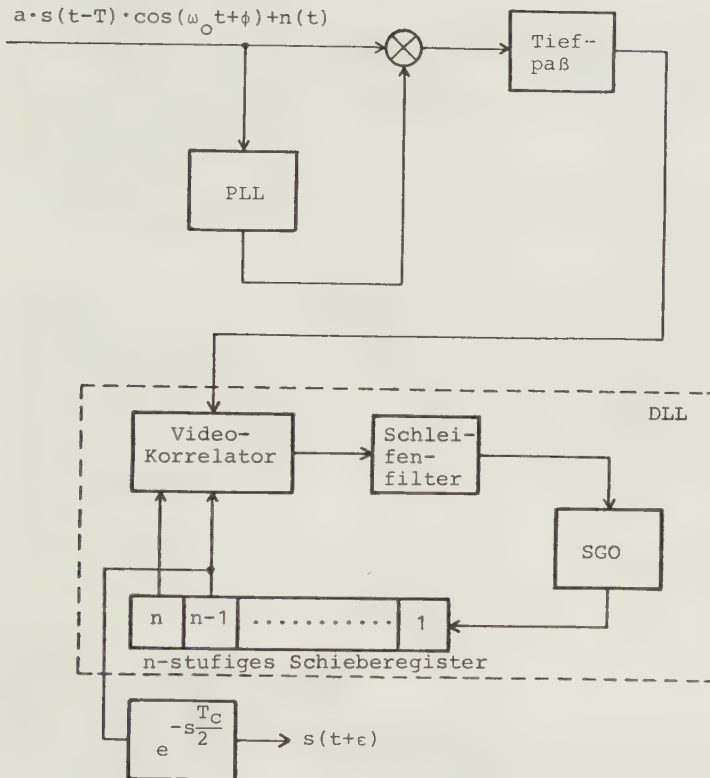


Bild 2.18 Kaskade von PLL und DLL zur Synchronisation von trägerfrequenten Signalen [23]

bestechen zwar durch ihre Einfachheit bei der Ausführung, sie haben aber den Nachteil, in dieser Form nur für durch Schieberegister generierte Signale Anwendung zu finden. Das in Bild 2.11 dargestellte System hingegen ist a-priori für alle Signalformen brauchbar, erfordert aber eine breitbandige ideale Differentiation in einem Signalzweig. Eine interessante Version eines Korrelationsnetzwerkes, welches die Nachteile beider vorgenannten Systeme vermeidet, wurde erstmals von Meyr [48], [49] vorgestellt. Hier wird zur Erzeugung der erforderlichen ungeraden Diskriminatorkennlinie das Filterpaar H_1 , H_2 verwendet, welches als analoge oder digitale Version ausgeführt sein kann. Bild 2.19 zeigt das Grundkonzept. Da diese Struktur die Basis für ausführlichere weitere Untersuchungen des 3. Kapitels darstellt, wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

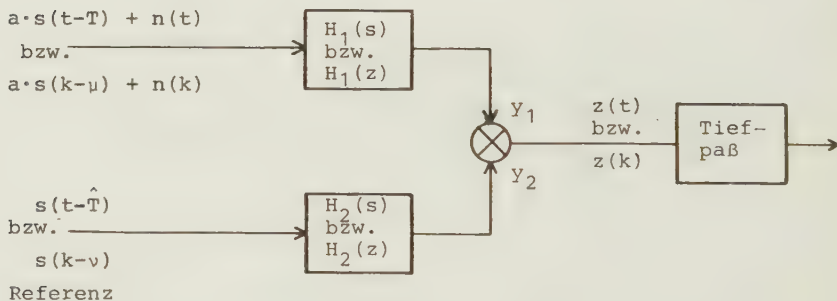


Bild 2.19 DLL-Korrelator mit Filterpaar

2.3.2 Phasenkohärente Korrelation im Trägerfrequenzbereich

Bei der Entwicklung des in Bild 2.18 gezeigten Systems wurde bereits erwähnt, daß das zu synchronisierende Breitbandsignal meist trägerfrequent empfangen wird. Die bereits dargestellte Kaskadierung eines PLL mit einem DLL stellt eine Möglichkeit zur Rückgewinnung der ursprünglichen Signalfolge $s(t)$ dar.

Eine andere Variation wurde von Gill [23] angegeben. Bei ihr sind die beiden Teilsysteme ineinander verschachtelt. Sie bewirken die phasenkohärente Korrelation im Trägerfrequenzbereich. Die entsprechende Anordnung ist in Bild 2.20 präsentiert [23]:

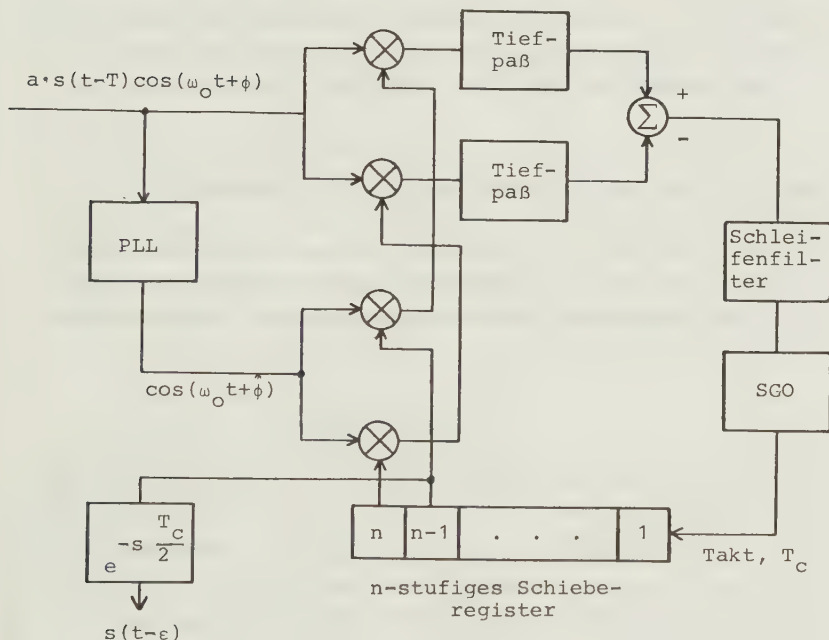


Bild 2.20 Phasenkohärente Korrelation

Für den Fall $\hat{\phi} \approx \phi$, d.h. wenn der PLL synchronisiert ist, ergibt sich nach [23] bei Verwendung von $s(t) \in \{-1, 1\}$ für die normierte Varianz des Zeitverzögerungsfehlers

$$\left[\frac{\sigma_{\hat{T}}}{T_c} \right]^2 = \frac{N_o \cdot B_n}{a^2} \quad (2.10)$$

wobei für B_n und N_o die gleichen Bezeichnungen wie für den Video-DLL gelten. Diese Form liefert also bei Einfluß von weißem Rauschen am Empfangseingang die gleiche Standardabweichung, s. Gl. (2.9), wie die kaskadierte Struktur nach Bild 2.18. Beiden angesprochenen Systemen ist gemeinsam, daß ein optimal dimensionierter PLL die Reproduktion der Trägerschwingung nach Frequenz und Phase vornehmen muß. Ist die Forderung $\phi \approx \hat{\phi}$ nicht erfüllt, verschlechtern sich die Ergebnisse für den DLL. Den Nachteil bezüglich der Anforderungen an den PLL vermeidet die noch folgende 3. Struktur für die Synchronisation von $s(t)$, die auch erstmals durch [23] vorgestellt wurde.

2.3.3 Bandpaßkorrelation (Einhüllenden-Korrelation)

Bei dem durch Bild 2.21 gezeigten Bandpaß-korrelierten DLL wird die Einhüllende durch Vollweggleichrichtung mit quadratischer Eingangs-Ausgangsabhängigkeit der Gleichrichter-netzwerke gebildet [23].

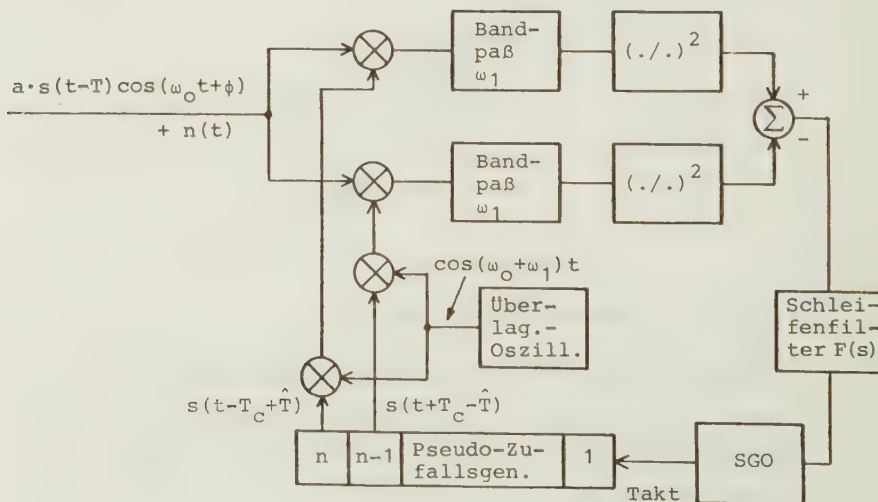


Bild 2.21 Bandpaß-korrelierter DLL

Die verwendeten Bandpässe sind mit der Mittenfrequenz auf die Differenz von Empfangs- und Oszillatorfrequenz ausgelegt, es liegt also das gleiche Prinzip wie bei einem Einfach-Superheterodyne-Empfänger vor. Durch die nichtlineare Operation bei den Bandpaß-Ausgangssignalen werden die beiden Autokorrelierten parabolisch in ihrem Verlauf, d.h. auch die durch Subtraktion gewonnene Diskriminator-kennlinie erhält parabolische Anteile in Abhängigkeit von ϵ [23]. Bei dem "2- T_C -Verzögerungssystem" ist auch der im Arbeitsbereich liegende Kennlinienteil ($|\epsilon| \leq T_C$) quadratisch mit der Steigung 0 bei $\epsilon \approx 0$. Dieses Modell ist also nicht brauchbar, s. [23] und Grünberger [29]. Für das "1- T_C -Modell ist zwar für $\frac{1}{2} T_C \leq |\epsilon| \leq \frac{3}{2} T_C$ die Kennlinie auch quadratisch von ϵ abhängig, allerdings wird im für den Regelkreis relevanten Teil ($|\epsilon| \leq \frac{T_C}{2}$) wieder eine lineare Verzögerungsabhängigkeit erreicht. Das letztgenannte Modell ist also das einzig brauchbare für eine Bandpaßkorrelation. Für den Fall zweiwertiger Folgen $s(t) \in \{-1, 1\}$ gibt Gill [23] die Varianz des normierten Zeitverzögerungsfehlers bei Einfluß weißen Empfangsrauschens zu

$$\left[\frac{\hat{\sigma}_T}{T_C} \right]^2 = \frac{B_n \cdot N_O}{a^2} + \frac{B_1 \cdot B_n \cdot N_O^2 \cdot 4}{a^4} \quad (2.11)$$

an, mit B_n als Rauschbandbreite des DLL und B_1 als die rechteckförmig angenommene Bandbreite der zur Korrelation verwendeten Bandpässe. Vergleich von Gl. (2.11) mit Gl. (2.9) bzw. (2.10) zeigt, daß dieses Modell etwas ungünstigere Werte bezüglich der Nachführeigenschaften bei Rauscheinfluß hat, dafür aber die phasenkohärente Demodulation der Trägerschwingung vermeidet.

Gill [23] untersuchte weiterhin für die drei durch die Bilder 2.18, 2.20 und 2.21 vorgestellten Modelle bei der Synchronisation von PN-Folgen das Schwellenverhalten des DLL. Für genauere Ausführungen sei auf [23] verwiesen. Als groben Richtwert kann man für das Überschreiten der Schwelle ungefähr annehmen:

$$\left[\frac{\hat{\sigma}_T}{T_C} \right]^2 \geq 0,09 \quad .$$

Etwa 10 Jahre nach Vorstellung des bandpaßkorrelierten DLL untersuchte Grünberger [29] das gleiche System bezüglich des Zwei- und Dreiwegeempfanges. Durch Echostörungen mit nicht zu vernachlässigender Amplitude wird ein Synchronisationsfehler verursacht, der primär durch Verformungen der Diskriminatorkennlinie entsteht.

Der dort aufgeführte Berechnungsansatz wurde in [20] verwendet, um das Spektrum eines nach Bild 2.19 aufgebauten mit RC-Filtern versehenen Korrelators zu berechnen.

3. Der Korrelator mit analogem Filterpaar

3.1 Bedingung für ungerade Diskriminatorkennlinie

Basierend auf dem von Meyr [48], [49] vorgeschlagenem System, welches den Vorteil hat, die erforderliche Kreuzkorrelationsfunktion zwischen beliebigen (breitbandigen) Empfangs- und Referenzsignalen zu bilden, findet eine weitere Untersuchung statt. Bild 3.1 zeigt noch einmal die bereits im 2. Kapitel angesprochene Struktur mit den weiter verwendeten Bezeichnungen.

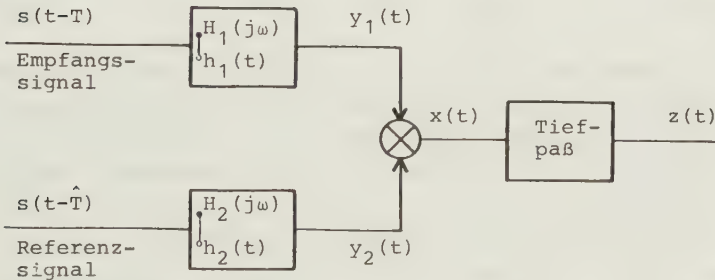


Bild 3.1 Korrelator mit analogem Filterpaar

Damit der DLL zwischen positiver und negativer Zeitdifferenz $\epsilon = T - \hat{T}$ unterscheiden kann, muß das Filterpaar H_1, H_2 eine ungerade Kreuzkorrelationsfunktion $E\{x(t)\}$ erzeugen, d.h. es muß gelten:

$$R_{y_1 y_2}(\epsilon) = - R_{y_1 y_2}(-\epsilon) \quad (3.1)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ stationär, ergodisch und reell sind, folgt mit der Substitution $t - T = \tau$:

$$y_1(t-T) = s(t-T) * h_1(t) = y_1(\tau)$$

$$y_2(t-\hat{T}) = s(t-\hat{T}) * h_2(t) = y_2(\tau+T-\hat{T}) = y_2(\tau+\epsilon)$$

Mit der Definition der KKF für reelle Signale [57], [58]

$$R_{y_1 y_2}(\epsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_1(\tau) \cdot y_2(\tau+\epsilon) d\tau$$

folgt durch Einsetzen in Gl. (3.1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y_1(\tau) y_2(\tau+\epsilon) + y_1(\tau) y_2(\tau-\epsilon)] d\tau \equiv 0 \quad \forall \epsilon$$

bzw.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_1(\tau) [2y_2(\tau)] d\tau = 0 \quad \text{für } \epsilon = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Gl. (3.2) sagt aus, daß die Signale y_1 , y_2 notwendig zueinander orthogonal gemacht werden müssen, und zwar durch die Filter H_1 , H_2 [38]. Als nächstes soll etwas ausführlicher als in [49] die Bedingung für die beiden Filter zueinander hergeleitet werden. Dazu wird gesetzt: $s_1(t) = s(t-T)$; $s_2(t) = s(t-\hat{T})$ da die Autokorrelationsfunktionen $R_{s_1}(\tau)$ und $R_{s_2}(\tau)$ bei den an die Signale $s(t)$ gemachten Voraussetzungen übereinstimmen. Mit der für lineare zeitinvarianten Filterung gültigen Faltungsrelation [63], [76] lassen sich die Filterausgangssignale angeben.

$$y_1(t) = s_1(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\alpha) h_1(\alpha) d\alpha \quad (3.3a)$$

$$y_2(t) = s_2(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\beta) h_2(\beta) d\beta \quad (3.3b)$$

Durch Multiplikation von (3.3a) mit $y_2^*(t-\tau)$ und von (3.3b) mit $s_1(t+\tau)$ ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E\{y_1(t) y_2^*(t-\tau)\} &= E\{y_1^*(t) y_2(t-\tau)\}^* = R_{y_2 y_1}^*(-\tau) \\ &= R_{y_1 y_2}(\tau) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Hierbei ist von der Definition der KKF komplexer Signale in der Form $R_{xy}(\tau) = E\{x(t+\tau)y^*(t)\}$ und der Äquivalenz $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$ Gebrauch gemacht worden. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge bei der Erwartungswertbildung und mit der Substitution $t-\tau = \tilde{t}$ kann weiter geschrieben werden:

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{s_1[\tilde{t}+(\tau-\alpha)] \cdot y_2^*(\tilde{t}) | \} h_1(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 y_2}(\tau-\alpha) h_1(\alpha) d\alpha \quad . \end{aligned}$$

Das letzte Integral entspricht aber gerade der Faltungsbeziehung, so daß gilt:

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = R_{s_1 y_2}(\tau) * h_1(\tau) \quad (3.5)$$

Aus dem konjugiert Komplexen von Gl. (3.3b) wird mit der Multiplikation mit $s_1(t+\tau)$ und anschließender Erwartungswertbildung

$$\begin{aligned} E\{y_2^*(t) \cdot s_1(t+\tau)\} &= E\{s_1(t+\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t-\beta) h_2^*(\beta) d\beta\} \\ &= E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau) \cdot s_2^*(t-\beta) \cdot h_2^*(\beta) d\beta \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{s_1(t+\tau) \cdot s_2^*(t-\beta)\} h_2^*(\beta) d\beta \quad . \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t-\beta = \hat{t}$ läßt sich das Integral schreiben als

$$\begin{aligned} E\{./.\} &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{s_2^*(\hat{t}) \cdot s_1(\hat{t}+\beta+\tau)\} h_2^*(\beta) d\beta = R_{s_1 y_2}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_2}(\tau+\beta) h_2^*(\beta) d\beta \quad . \end{aligned}$$

Setzt man formal $\beta = -\gamma$, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} R_{s_1 y_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_2}(\tau-\gamma) h_2^*(-\gamma) d(-\gamma) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_2}(\tau-\gamma) h_2^*(-\gamma) d\gamma \quad . \end{aligned}$$

Jetzt ist wieder eine Interpretation als Faltungsprodukt möglich in der Form

$$R_{s_1 y_2}(\tau) = R_{s_1 s_2}(\tau) * h_2^*(-\tau)$$

Setzt man diese Beziehung in die Gl. (3.5) ein, so folgt die wesentliche Relation:

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = R_{s_1 s_2}(\tau) * h_1(\tau) * h_2^*(-\tau) \quad (3.6)$$

Es fehlt noch ein Ausdruck für die KKF der Filtereingangsgrößen, die für reelle Signale und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Variable τ durch die Zeitdifferenz von Empfangs- und Referenzsignal entsteht, in folgender Form angegeben werden kann ($\delta = t-T$):

$$\begin{aligned} E\{s_1(t) \cdot s_2(t)\} &= E\{s(t-T) \cdot s(t-\hat{T})\} = \\ &= E\{s(\delta) \cdot s(\delta+T-\hat{T})\} = R_s(\epsilon) \stackrel{!}{=} R_{s_1 s_2}(\tau) \end{aligned}$$

Somit folgt für die Diskriminatorkennlinie $\overline{x(t)} = R_{y_1 y_2}(\epsilon)$

$$R_{y_1 y_2}(\epsilon) = R_s(\epsilon) * h_1(\epsilon) * h_2(-\epsilon) \quad (3.7a)$$

wobei wegen der jetzt reellwertig angenommenen Signale $s_{1,2}(t)$ die Impulsantworten der Filter ebenfalls nur reellwertig sein können, d.h. $h_2^*(-t) = h_2(-t)$.

Mit den Fourierkorrespondenzen

$$\begin{array}{ll} R_s(\epsilon) & \text{---} \bullet \text{---} S_s(\omega) \\ h_1(\epsilon) & \text{---} \bullet \text{---} H_1(j\omega) \\ h_2(-\epsilon) & \text{---} \bullet \text{---} H_2^*(j\omega) \end{array}$$

und Anwendung des Wiener-Khintchine Relation, erhält man die der Gl. (3.7a) entsprechende Aussage im Frequenzbereich

$$R_{y_1 y_2}(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega) \cdot S_s(\omega) \cdot e^{j\omega\epsilon} d\omega \quad (3.7b)$$

Aufteilung der Filterfrequenzfunktionen in Real- und Imaginärteil $H_1(j\omega) = A_1(\omega) + jB_1(\omega)$; $H_2^*(j\omega) = A_2(\omega) - jB_2(\omega)$, Bilden von $H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ mit $A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) + B_1(\omega) \cdot B_2(\omega)$, $B(\omega) = A_2(\omega) \cdot B_1(\omega) - A_1(\omega) \cdot B_2(\omega)$ und Einsetzen in Gl. (3.7b) liefert

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + jB(\omega)] \cdot S_S(\omega) [\cos\omega\varepsilon + j\sin\omega\varepsilon] d\omega.$$

Unter Berücksichtigung der Integration in symmetrischen Grenzen bei Integranden, die Teilprodukte gerader und ungerader Funktionen enthalten, vereinfacht sich die Darstellung zu:

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(\omega) \cdot A(\omega) \cdot \cos\omega\varepsilon d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(\omega) \cdot B(\omega) \cdot \sin\omega\varepsilon d\omega.$$

Da $A(\omega) = A(-\omega)$ eine gerade Funktion ebenso wie $S_S(\omega)$ ist, und $B(\omega) = -B(-\omega)$ eine ungerade Funktion in ω repräsentiert, ergibt sich für die Forderung nach einer ungeraden KKF mit $R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = -R_{Y_1 Y_2}(-\varepsilon)$ die notwendige und hinreichende Bedingung für das Filterpaar zu:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &\equiv 0 \\ \text{bzw.} \\ A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) &= -B_1(\omega) \cdot B_2(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Umstellung der 2. Zeile von Gl. (3.8) gibt Auskunft über den erforderlichen Phasengang der beiden Systeme H_1 und H_2 zueinander.

$$\frac{A_1(\omega)}{B_1(\omega)} = \tan\varphi_1 = -\frac{B_2(\omega)}{A_2(\omega)} = -\frac{1}{\tan\varphi_2}.$$

Mit $\tan\varphi_1 \cdot \tan\varphi_2 + 1 = 0$ und Anwendung des Additionstheorems [10]

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1 \cdot \tan\varphi_2} = \infty$$

ergibt sich:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega, n \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

In der Darstellung der Teilsysteme $H_{1,2}(j\omega) = |H_{1,2}(\omega)| \cdot e^{j\varphi_{1,2}(\omega)}$ werden also keine Anforderungen an den Amplitudengang des Filterpaares gestellt, lediglich die Differenzphase wird vorgeschrieben, um eine ungerade Diskriminatorkennlinie zu erhalten. Ebenso spielt die Form der AKF $R_S(\tau)$ bezüglich der geforderten Eigenschaft der Regelkennlinie keine Rolle. Gl. (3.9) sagt aus, daß die beiden Ausgangssignale des Filterpaares "breitbandig" zueinander um $\pm \pi/2$ ($3\pi/2 \dots$) verschoben sein müssen, d.h. die bereits durch Gl. (3.2) angesprochene Orthogonalität muß erfüllt sein.

3.2 Verschiedene nicht realisierbare Filter

3.2.1 Differenzierer

Für den Zweig mit $H_1(j\omega)$ sei ein zunächst beliebiges Filter $H(j\omega)$ angenommen. Wird im 2. Zweig neben dem gleichen Filter $H(j\omega)$ zusätzlich ein ideales Differenzierglied mit dem Frequenzgang $j\omega$ in Kaskade geschaltet, so zeigt Anwendung der Gl. (3.8) bzw. (3.9), daß die geforderte ungerade KKF $R_{Y_1 Y_2}(\epsilon)$ erreicht wird. Der Sonderfall mit $H(j\omega) = 1$ ist genau bei dem von Spilker und Magill [69] in Bild 2.11 dargestelltem System realisiert.

Die AKF einer langen PN-Folge ähnelt der einer echten Zufallsfolge mit Ausnahme der Periodizität mit pT_C sehr stark. Vorerst wird angenommen, daß $R_S(\epsilon)$ von einer echten Zufallsfolge mit $s \in \{-1, 1\}$ stammt [Bild 3.2].

Mit Gl. (3.7b) folgt

$$R_{Y_1 Y_2}(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot (-j\omega) \cdot S_S(\omega) \cdot e^{j\omega\epsilon} d\omega \quad \text{bzw.}$$

gilt die entsprechende Aussage im ϵ -Bereich

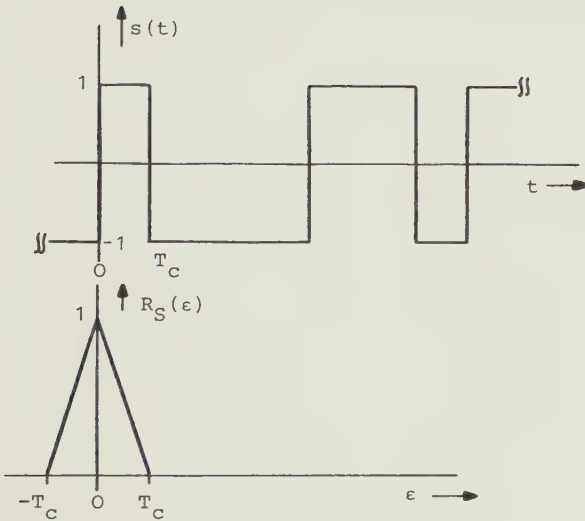


Bild 3.2 Echte Zufallsfolge und AKF $R_S(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) &= \mathcal{F}^{-1}\{-j\omega\} * R_S(\varepsilon) \\
 &= - \frac{d \delta_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} * R_S(\varepsilon) = - \delta_1(\varepsilon) * R_S(\varepsilon) \quad ,
 \end{aligned}$$

mit $\delta_1(\varepsilon)$ als Derivierter der Dirac'schen Deltafunktion $\delta_0(\varepsilon)$. Die Faltung einer Funktion mit $\delta_1(\varepsilon)$ bedeutet aber direkte Ableitung der Funktion im Zeitbereich. Somit ergibt sich für die KKF:

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = - \frac{dR_S(\varepsilon)}{d\varepsilon} = A(\varepsilon) \quad . \quad (3.10)$$

Für den speziellen Fall einer langen PN-Folge oder einer echten Zufallsfolge als Signalfunktion $s(t)$ zeigt Bild 3.3 die Diskriminatorkennlinie. Diese ist, sofern die Maximal-

werte von Empfangs- und Referenzfolge von "1" verschieden sind, noch mit dem Produkt der Amplitudenfaktoren zu bewerten.

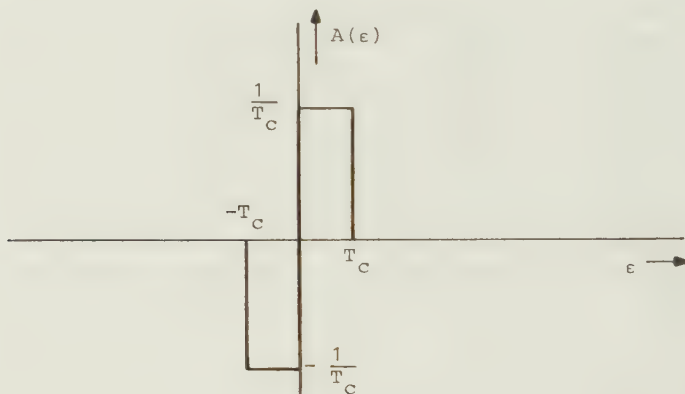


Bild 3.3 Diskriminatorkennlinie für Korrelator mit idealem Differenzierer im Referenzzweig

3.2.2 Hilbert-Transformation

Eine andere Möglichkeit die nach Gl. (3.9) geforderte breitbandige 90° -Phasenverschiebung zur Erzielung einer ungeraden KKF zu erhalten, besteht in der Einführung eines "Hilbert-Transformators" in einen Zweig des Korrelators.

Schlitt hat in [58] diese Möglichkeit bereits zur Bildung der sogenannten "orthogonalen Korrelationsfunktion" vorgeschlagen. Wird hier im speziellen Fall wieder die AKF $R_S(\epsilon)$ der echten Zufallsfolge mit

$$R_S(\epsilon) = \begin{cases} 1 - \frac{|\epsilon|}{T_C} & \text{für } |\epsilon| \leq T_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für das System $H_1(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$ $\circ \longrightarrow \frac{1}{\pi t}$ der ideale Hilbert-Transformator angenommen [58], so gilt mit $H_2(j\omega) \equiv 1$ (Durchverbindung, Draht) nach Gl. (3.7a)

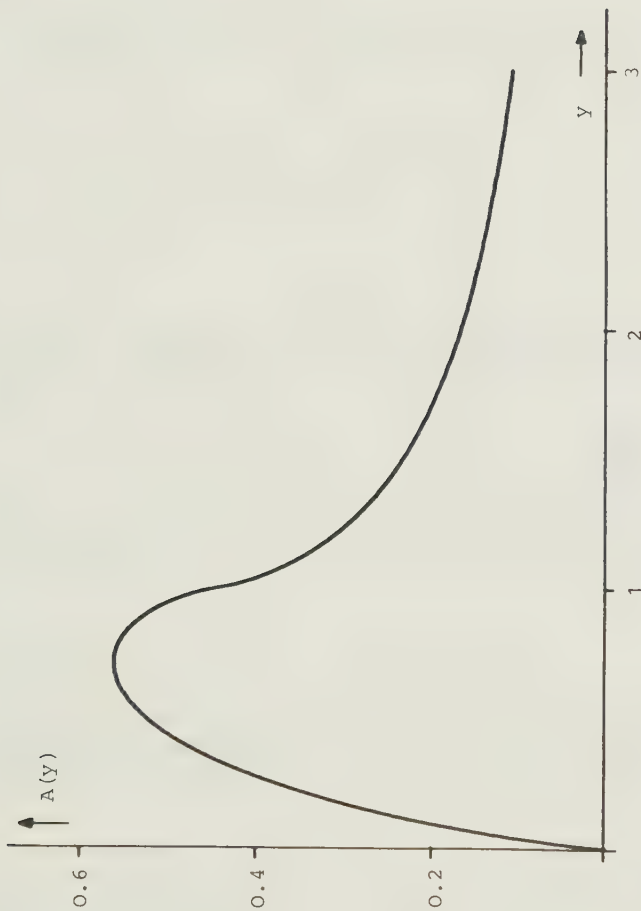


Bild 3.4 Diskriminatorkennlinie für Hilbert-Transformation des
Empfangszweiges

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = R_S(\varepsilon) * \frac{1}{\pi \varepsilon} * \delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_S(\tau)}{\varepsilon - \tau} d\tau.$$

Ausführung der Integration, s. Anhang A1 liefert die normierte Diskriminatorkennlinie für die auf T_C normierte Zeitverzögerung $y = \frac{\varepsilon}{T_C}$ (für $y > 0$)

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}\left(\frac{\varepsilon}{T_C}\right) &= A(y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + y \cdot \ln \left| \frac{(y+1)(y-1)}{y^2} \right| \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (1+y) \ln \left| \frac{y+1}{y} \right| + (1-y) \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

welche in Bild 3.4 dargestellt ist.

Die Steigung im Nullpunkt, sowie Lage und Höhe des Maximums wird durch Ableitung der Gl. (3.11) erhalten (s. Anhang A1).

$$\frac{dA(y)}{dy} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) \quad \text{für } y < 1$$

Die Steigung im Nullpunkt geht gegen Unendlich!

Das Maximum wird durch $\frac{dA(y)}{dy} = 0$ für $\frac{1}{y^2} - 1 = 1$ zu $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ errechnet. Es beträgt

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = A_{\max} = \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,561099.$$

Allerdings sind diese Ergebnisse nur von theoretischem Interesse, da ein analoges System zur Hilbert-Transformation nicht realisierbar ist.

3.2.3 Integrierer

Die Gl. (3.9) wird auch erfüllt, wenn in einem Zweig des Korrelators ein idealer Integrierer angeordnet ist. Hier wird gesetzt: $H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \circ \bullet \frac{1}{2} \operatorname{sgn} t |76|$, $H_2(j\omega) = 1$. Unter der bereits vorher gemachten Annahme, daß die Folge $s(t)$ eine echte Zufallsfolge ist (dreieckförmige AKF), läßt sich mit der nachfolgenden Faltungsrelation die Kennlinie $A(\varepsilon)$ bestimmen.

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = A(\varepsilon) = R_S(\varepsilon) * \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \varepsilon * \delta_0(\varepsilon).$$

Ausführung der Integration (s. Anhang A2) und Normierung der Zeitdifferenz $y = \frac{\varepsilon}{T_c}$ führt auf:

$$A(y) = \frac{T_c}{2} \cdot \begin{cases} 1 - (1-y)^2 & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq y \leq \infty \end{cases} \quad (3.12)$$

wobei für negative Werte von y gilt: $A(-y) = -A(y)$.

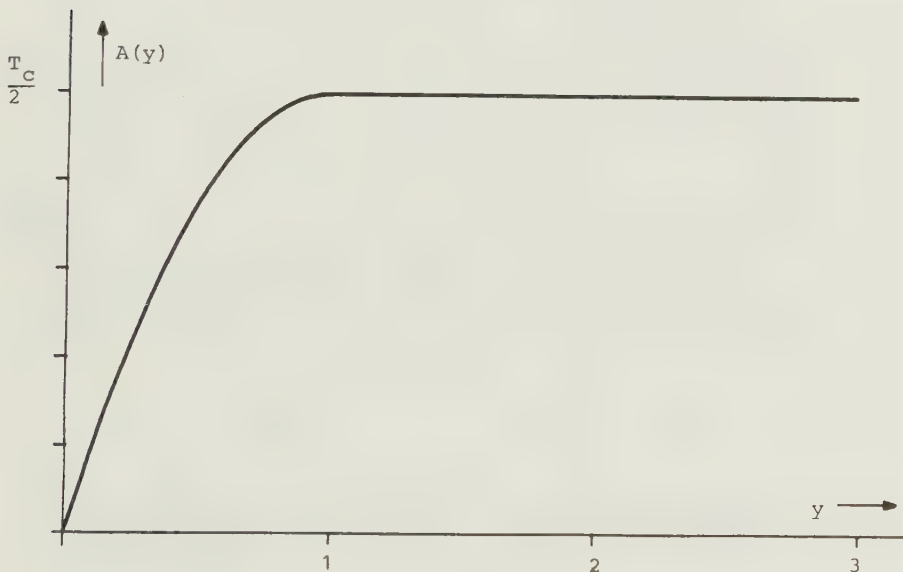


Bild 3.5 Kennlinie für Integrierer im Empfangszweig

Bild 3.5 zeigt den Verlauf. Die Steilheit der Kennlinie im Nullpunkt folgt mit Gl. (3.12) zu

$$\left. \frac{dA(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{T_c}{2} [2(1-y)] \left. \frac{1}{T_c} \right|_{y \rightarrow 0} = 1$$

Aber auch der Integrierer läßt sich für den geforderten breitbandigen Bereich nicht exakt realisieren.

Ohne weitere Betrachtungen darüber anzustellen, inwieweit approximativ die drei bis jetzt geschilderten Möglichkeiten zur breitbandigen -90° -Phasenverschiebung erreicht werden können, erfolgen weiterhin Untersuchungen von direkt realisierbaren Filterpaaren.

3.3 Realisierbare Filter

3.3.1 RC-CR-System

Im Kap. 3.2.1 wurde der allgemeine Fall angesprochen, bei dem in beiden Korrelationszweigen gleiche beliebige Filter $H(j\omega)$ angeordnet sind, wobei zusätzlich in einem Zweig eine Differenzierung des Zeitsignals erfolgen muß. Dieses Verhalten kann nun in das in der Kaskade bereits vorhandene Filter $H(j\omega)$ "hereingezogen" werden. Hat das Filter $H(j\omega) = H_1(j\omega)$ Tiefpaßcharakter, so ergibt sich dadurch zwangsläufig für $H_2(j\omega)$ ein Hochpaß- bzw. Bandpaßverhalten. Diese Tatsache soll mit dem einfachsten realisierbarem Tiefpaß 1. Grades, einem RC-Glied näher betrachtet werden, s. Bild 3.6.

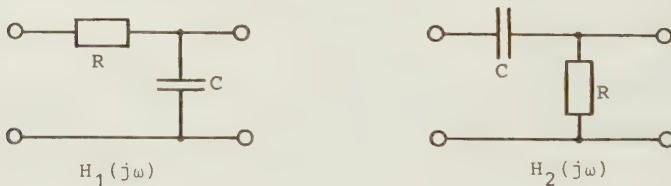


Bild 3.6 RC-CR-Filterpaar

Die Übertragungsfunktionen ergeben sich für die angenommenen Filter mit der Zeitkonstanten $T = R \cdot C$ zu:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}} ; \quad H_2(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{T}} \quad (3.13)$$

Es gilt also $H_2(j\omega) = j\omega \cdot T \cdot H_1(j\omega)$, womit die Bedingung für eine orthogonale Korrelation nach Gl. (3.9) erfüllt ist. Für diese beiden Filter wird zunächst die Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$ berechnet und zwar für die beiden Fälle, daß $s(t)$

einmal eine periodische PN-Folge der Länge p ist und zum anderen wieder die echte Zufallsfolge mit gleichen Maximalwerten 1 als Signaltyp verwendet wird. Den Berechnungsansatz liefert die Gl. (3.7b).

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}} \cdot \frac{(-j\omega)}{\frac{1}{T} - j\omega} \cdot S_S(\omega) \cdot e^{j\omega\varepsilon} d\omega$$

Diese Form läßt sich geschlossen nicht auswerten, da in beiden Fällen der verwendeten Signale $s(t)$ die si^2 -Funktion als Fouriertransformierte der dreieckförmigen AKF $R_S(\varepsilon)$ auftritt. Es kann also nur Berechnung im Zeitbereich erfolgen.

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= R_S(\varepsilon) * h_1(\varepsilon) * h_2(-\varepsilon) \stackrel{!}{=} R_S(\varepsilon) * h(\varepsilon) \\ &= R_S(\varepsilon) * \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega)\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für $h(t)$ nach [76] Tab. S. 148 und Berücksichtigung einer Differentiation:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{jT} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \left(\frac{1}{T}\right)^2} \right\} = \frac{1}{2T} \{e^{-t/T} \cdot \delta_{-1}(t) - e^{t/T} \cdot \delta_{-1}(-t)\} \quad (3.15)$$

1. Fall: $s(t)$ sei eine periodische PN-Folge, deren AKF $R_S(t)$ durch Gl. (2.4) für $t = \tau$ angegeben werden kann. Wegen der Periodizität mit $R_S(t) = R_S(t - pT_c)$ läßt sich eine Fourier-Reihendarstellung für diese Funktion finden.

$$v(t) \stackrel{!}{=} \mathcal{F}_R\{R_S(t)\} = \frac{1}{p^2} + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{p+1}{\pi^2} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{v^2} \cdot \cos v \frac{2\pi}{pT_c} \cdot t \quad (3.16)$$

Mit der Gl. (3.14) wird für $t = \varepsilon$ die Diskriminatorkennlinie für positive und negative t zu

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = A_p(\varepsilon) = \frac{1}{2T} \cdot \left\{ \text{sgn} \varepsilon \cdot e^{\frac{-\varepsilon \text{sgn} \varepsilon}{T}} * v(\varepsilon) \right\}$$

erhalten. Die Auswertung s. Anhang A3 führt auf

$$A_p(\epsilon) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{T}{T_c} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{1 + \left(v \frac{2\pi}{p} \frac{T}{T_c}\right)^2} \cdot \frac{\sin v \frac{2\pi}{p} T_c \cdot \epsilon}{v} \quad (3.17)$$

Offenbar gilt $A_p(0) = 0$ und $A_p(\epsilon) = -A_p(-\epsilon)$.

2. Fall: Als Signalfunktion $s(t)$ dient eine echte Zufallsfolge mit $s(t) \in \{-1, 1\}$ und der zugehörigen AKF $R_s(t)$ entsprechend Bild 3.2. Auch hierbei ist Berechnung durch Faltung im Zeitbereich erforderlich. Die dreieckförmige AKF wird zweckmäßigerweise durch die Faltung zweier Rechteckimpulse wie in Bild 3.7 angegeben ausgedrückt.

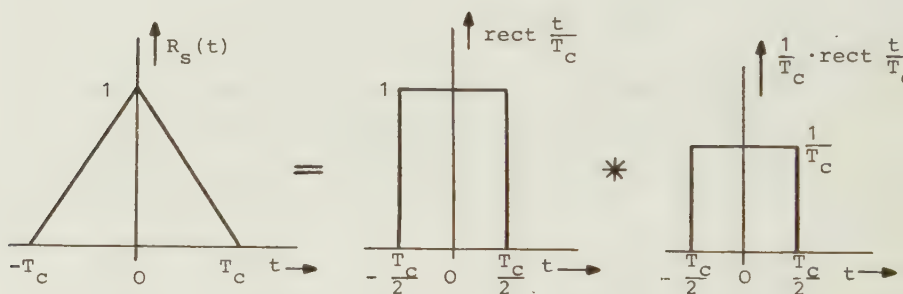


Bild 3.7 Darstellung der AKF durch Faltung zweier Rechteckfunktionen

In Anlehnung an Gl. (3.14) wird mit der angegebenen Zerlegung $A(\epsilon)$ erhalten.

$$A(\epsilon) = \frac{1}{T_c} \cdot \text{rect} \frac{\epsilon}{T_c} * \text{rect} \frac{\epsilon}{T_c} * \left(\frac{1}{2T} \cdot \text{sgn} \epsilon \cdot e^{-\frac{\epsilon \text{sgn} \epsilon}{T}} \right)$$

Vertauschen der Faltungsreihenfolge ergibt nach Zwischenrechnung s. Anhang A4 die Diskriminatorkennlinie bei Betrieb des Korrelators mit echten Zufallsfolgen.

$$A(\varepsilon) = \frac{T}{T_c} \cdot \operatorname{sgn} \varepsilon \cdot \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon \operatorname{sgn} \varepsilon}{T}} \cdot \cosh\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) & \text{für } |\varepsilon| \geq T_c \\ 1 - e^{-\frac{\varepsilon \operatorname{sgn} \varepsilon}{T}} - e^{-\frac{T_c}{T}} \sinh \frac{|\varepsilon|}{T} & \text{für } |\varepsilon| \leq T_c \end{cases} \quad (3.18)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gl. (3.17), welche wegen der unendlichen Summe numerische Auswertung erforderlich macht, so drängt sich die Frage auf, ob für die periodische Kennlinie $A_p(\varepsilon)$ bei Betrieb mit (periodischen) PN-Folgen endlicher Länge nicht ein einfacherer Ausdruck ähnlich der Gl. (3.18) gefunden werden kann. Das ist möglich bei Zerlegung der erforderlichen Faltungsoperation entsprechend Bild 3.8.

Die Faltung von $h(\varepsilon)$ mit einem einzelnen Dreieck um $\varepsilon = 0$ ist bis auf den anderen Amplitudenfaktor $(1 + \frac{1}{p})$ bereits durch Gl. (3.18) berechnet. Die weiteren Dreiecke der AKF um $\varepsilon = \varepsilon \pm v p T_c$, $v \in \mathbb{N}$ liefern insgesamt einen Störterm $\tilde{A}(\varepsilon)$, so daß für die periodische AKF $A_p(\varepsilon)$ gilt $|20|$:

$$A_p(\varepsilon) = A(\varepsilon) + \tilde{A}(\varepsilon) \quad .$$

Auswertung der bei $\tilde{A}(\varepsilon)$ auftretenden unendlichen Summe liefert:

$$A_p(\varepsilon) = \frac{p+1}{p} \cdot \frac{T}{T_c} \operatorname{sgn} \varepsilon \cdot \begin{cases} \left(\cosh \frac{T_c}{T} - 1 \right) \cdot \left[e^{-\frac{\varepsilon \operatorname{sgn} \varepsilon}{T}} - \frac{2 \sinh \frac{|\varepsilon|}{T}}{e^{\frac{T_c}{T}} - 1} \right] & \text{für } T_c \leq |\varepsilon| \leq \frac{p T_c}{2} \\ 1 - e^{-\frac{\varepsilon \operatorname{sgn} \varepsilon}{T}} - e^{-\frac{T_c}{T}} \sinh \frac{|\varepsilon|}{T} & \\ - 2 \left(\cosh \frac{T_c}{T} - 1 \right) \cdot \frac{\sinh \frac{|\varepsilon|}{T}}{e^{\frac{T_c}{T}} - 1} & |\varepsilon| \leq T_c \end{cases} \quad (3.19)$$

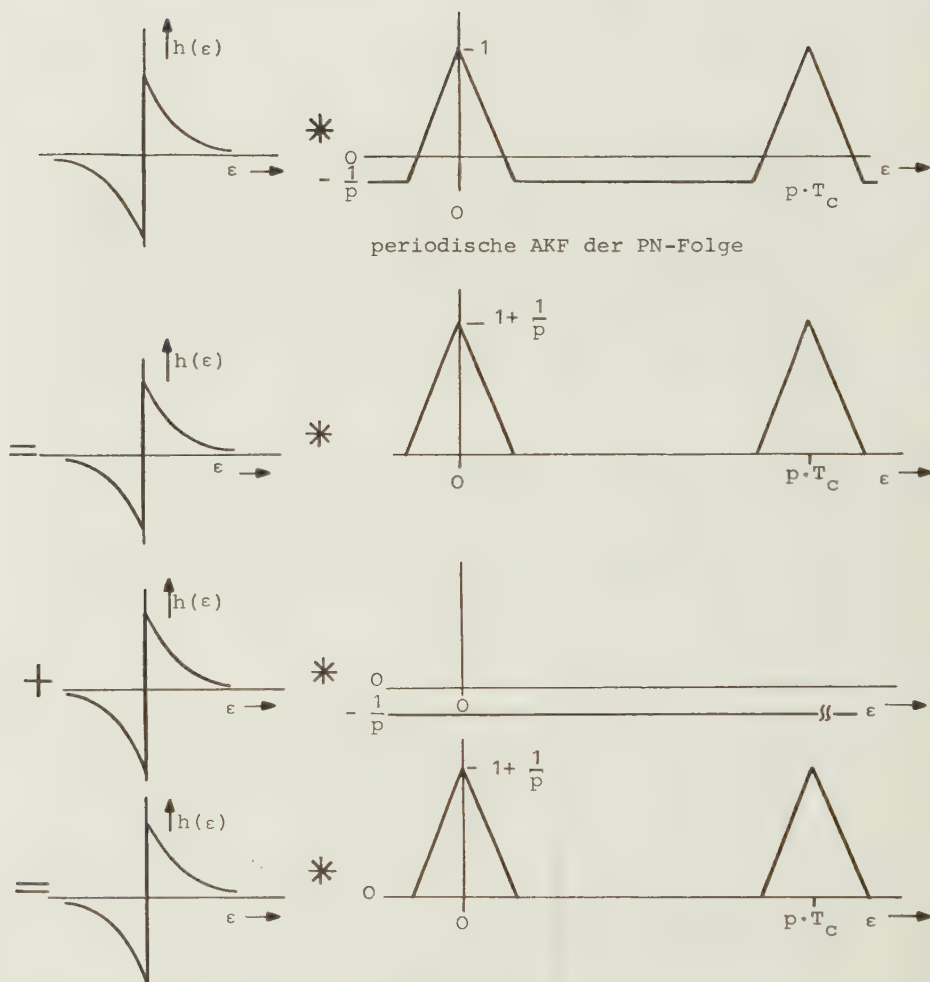


Bild 3.8 Zur Zerlegung der Faltung von $h(t)$ mit der periodischen AKF einer PN-Folge

Die Gleichungen (3.17) und (3.19) liefern identische Aussagen. Bezüglich der Konvergenz der unendlichen Summe in Gl. (3.17) wurde für eine Folgenlänge von $p = 15$ einmal $A_p(\epsilon)$ nach Gl. (3.19), zum anderen nach Gl. (3.17) mit $v_{\max} = 128$ als obere Summationsgrenze mit dem Rechner ausgewertet. Es ließen sich keine Abweichungen mehr feststellen. Weiterhin kann festgestellt werden, daß für Folgenlängen $p > 511$ die Beziehung Gl. (3.18) für echte Zufallsfolgen ohne nennenswerten Fehler verwendet werden kann, wenn als Signalfunktion eine PN-Folge eingesetzt wird. Bild 3.9 zeigt $A(\epsilon)$ (echte Zufallsfolge) und $A_p(\epsilon)$ für eine extrem kurze PN-Folge mit $p = 15$. In beiden Fällen beträgt $\frac{T_C}{T} = 2$.

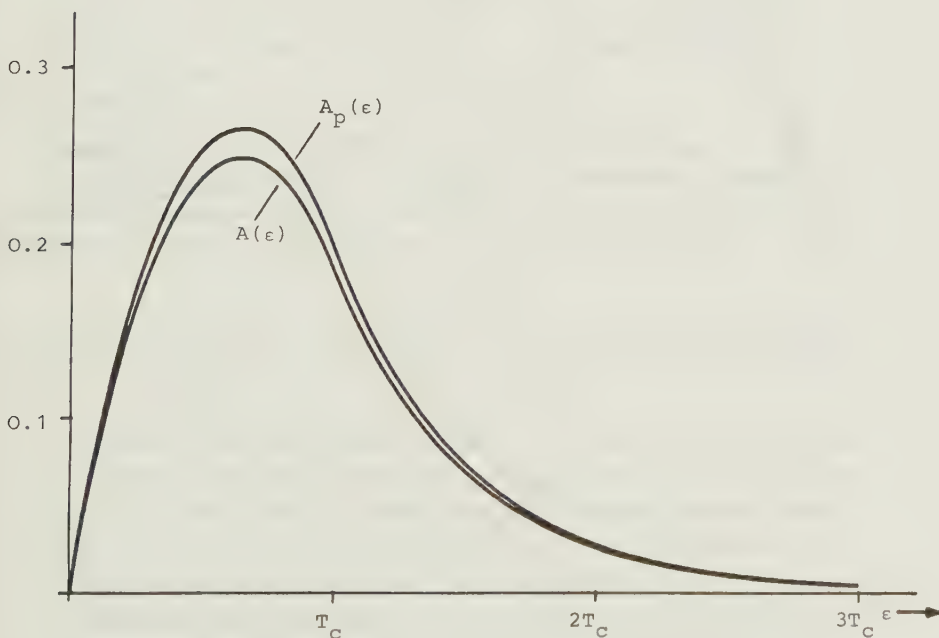


Bild 3.9 Diskriminatorkennlinie für RC-Korrelator für echte Zufallsfolge und für PN-Folge mit $p = 15$

In Bild 3.10 ist mit dem Parameter $\frac{T_C}{T} = b$ die Kennlinie des RC-Systems bei Betrieb mit echten Zufallsfolgen dargestellt.

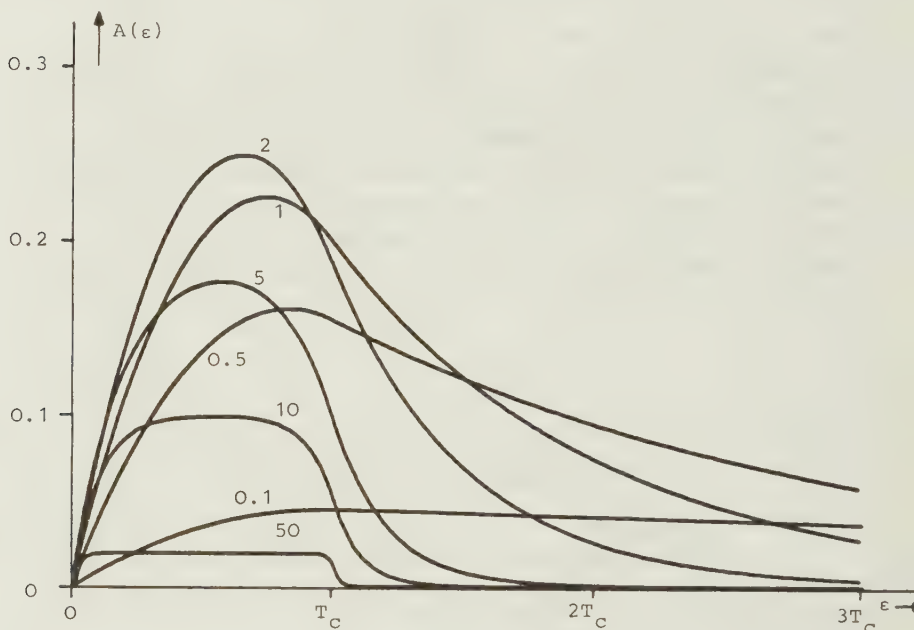


Bild 3.10 Kennlinie für echte Zufallsfolge bei Variation von $\frac{T_C}{T} = b$ (Chipzeit zu Filterzeitkonstante)

Wählt man $b \ll 1$, so ergibt sich durch das integrierende Verhalten des Tiefpaßfilters eine Kennlinie, die den mit Integrierer ausgerüsteten Korrelator annähert, vgl. Bild 3.5.

Für ein großes b , d.h. sehr viel kleinere Filterzeitkonstante im Verhältnis zur Chipzeit T_C (Einzelrechteckbreite) zeigt der Hochpaßzweig näherungsweise differenzierendes Verhalten, was durch Vergleich der Funktion $A(\epsilon)$ für $b = 50$ mit der Kennlinie bei idealer Differentiation s. Bild 3.3 sofort ersichtlich ist. Allerdings wird mit steigendem b der Maximalwert von $A(\epsilon)$ kleiner. Es ist für das Maximum von $A(\epsilon)$ eine

Optimierung bezüglich des Parameters b möglich, die im folgenden durchgeführt wird. Dabei dient die Kennlinie bei Betrieb mit echten Zufallsfolgen aus den vorher erwähnten Gründen als Basis. Mit der Normierung

$$\frac{\varepsilon}{T_c} = y ; \quad \frac{T_c}{T} = b ; \quad \frac{\varepsilon}{T} = b \cdot y$$

wird für nur positive Verschiebungen y aus Gl. (3.18)

$$f(y, b) = \frac{1}{b} \cdot \begin{cases} e^{-by} \cdot \cosh(b-1) & \text{für } y \geq 1 \\ 1 - e^{-by} - e^{-b} \cdot \sinh by & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

als Funktion von den beiden unabhängigen Veränderlichen y und b erhalten. Für die Suche des Maximums ist nur der Funktionsteil für den Bereich $0 \leq y \leq 1$ relevant. Es ist zu bilden:

$$df(y, b) = f_y \cdot dy + f_b \cdot db \equiv 0 .$$

Notwendig dafür ist das Verschwinden der beiden partiellen Ableitungen, d.h. $f_y = 0$ und $f_b = 0$. Die Auswertung erfolgt im Anhang A5. Das Maximum der Funktion $f(y, b)$ liegt bei

$$y_{\max} = \left(\frac{\varepsilon}{T_c}\right)_{\max} = \frac{\ln(2e^b - 1)}{2b} \quad (3.20a)$$

und

$$b_{\max} = b_{\text{opt}} = \frac{T_c}{T} = 1,810703157 \quad (3.20b)$$

wobei sich Gl. (3.20b) als iterative Lösung einer transzendenten Gleichung ergibt. Einsetzen von Gl. (3.20b) in Gl. (3.20a) ergibt die Lage des Maximums der optimierten Kennlinie zu $y_{\max} = 0,667846478$ und durch Einsetzen dieses Wertes und der Gl. (3.20b) in die Funktionsgleichung für die Diskriminatorkennlinie nach Gl. (3.18) erhält man den maximal erreichbaren Wert zu $A(\varepsilon)_{\max} = 0,249612084$.

Mit einem RC-Filterpaar-Korrelator sind also nur rund 25% des Maximalwertes der Regelkennlinie im Vergleich zu den

1- T_C bzw. 2- T_C -Verzögerungsmodellen zu erreichen (Bilder 2.14 und 2.15). Allerdings kann ein derartiges Korrelationsnetzwerk für beliebige Signaltypen $s(t)$ verwendet werden, d.h. die Beschränkung auf Einsatz von PN-Folgen entfällt. Haben die verallgemeinert verwendbaren Signale $s(t)$ zusätzlich noch eine dreieckförmige AKF, wie sie durch die Bilder 3.2 oder 3.8 gezeigt werden, so ist ein direkter Einsatz der in diesem Abschnitt abgeleiteten Ergebnisse möglich. Für die Steigung der hier vorgestellten Diskriminatorkennlinie um $\epsilon = 0$ erhält man durch Ableitung der Gl. (3.18) nach ϵ

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{T} \cdot e^{-\epsilon/T} - e^{-b} \cdot \frac{1}{T} \cdot \cosh \frac{\epsilon}{T} \right)$$

$$\left. \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{T_C} (1 - e^{-b}) \quad (3.20c)$$

Für die Optimaldimensionierung $b = b_{\text{opt}}$ ergibt sich eine Steilheit von $\frac{0,83646}{T}$, d.h. es werden 83,6% der Steigung des 2- T_C -Verzögerungs-DLL bzw. 41,8% im Vergleich zum 1- T_C -Modell erreicht. Eine Optimierung der Steigung (Maximalwert $\frac{1}{T_C}$ für $b \rightarrow \infty$) ist sinnlos, da für wachsendes b die Amplitude der Kennlinie gegen 0 geht, siehe Tendenz in Bild 3.10.

Vergleicht man die Grenzfrequenz des RC-Filterpaares mit der Taktfrequenz $f_C = \frac{1}{T}$ bei Einsatz von PN-Folgen, so ergibt sich, daß beim optimal C dimensionierten Filterpaar die Grenzfrequenz $f_g = \frac{1}{2 \cdot T}$ (3dB) etwa 29% der Taktfrequenz betragen muß.

Ziel der weiteren Betrachtungen ist es nun, andere eventuell höhergradige Filterpaare zu finden, welche bezüglich der Steigung um $\epsilon = 0$ und des Maximalwertes der Diskriminatorkennlinie höhere Werte als das RC-Filterpaar liefern. Als nächste Filterstruktur bietet sich ein Filterpaar 2. Grades mit verschiedenartigen Energiespeichern an.

3.3.2 RLC-Kreis

Durch Erweiterung des im vorigen Kapitels vorgestellten RC-Filters um eine Induktivität entsteht die durch Bild 3.11 dargestellte Filterstruktur.

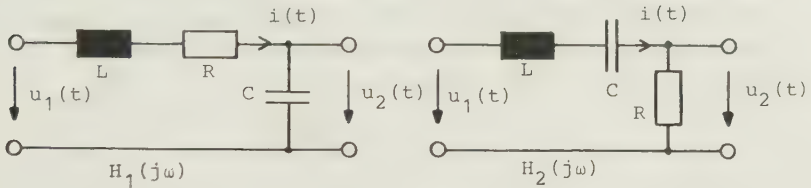


Bild 3.11 RLC-Filterpaar

Ohne die Bedingung für breitbandige 90° -Phasendrehung bei der Netzwerke zueinander näher zu prüfen, ist sofort zu sehen, daß bei Sekundärleerlauf und gleicher Eingangserregung $u_1(t)$ auch die beiden Ströme $i(t)$ gleich sind. Für das Filter H_2 ist $u_2(t) = i(t) \cdot R$, währenddem für das Filter H_1 die Ausgangsspannung exakt in integrealem Zusammenhang zum

Strom steht, d.h. $u_2(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$. Somit läßt sich mit

H_1 und H_2 in der durch Bild 3.1 gezeigten Anordnung eine orthogonale Korrelation erzielen. Die Übertragungsfunktionen ergeben sich mit der komplexen Frequenzvariablen $s = \sigma + j\omega$ zu:

$$H_1(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} ; \quad H_2(s) = \frac{\frac{RC}{LC} \cdot s}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (3.21)$$

Wird wieder $RC = T$ gesetzt, so gilt wie beim RC-Filterpaar:

$$H_2(s) = H_1(s) \cdot sT$$

bzw. für $s = j\omega$

$$H_2(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot j\omega T$$

womit sofort zu sehen ist, daß Gl. (3.9) erfüllt wird.

Verglichen mit dem RC-Filterpaar zeigt das System $H_1(j\omega)$ Tiefpaßverhalten mit steilerem Abfall des Frequenzganges, das Filter $H_2(j\omega)$ wirkt hier als Bandpaß im Gegensatz zum Hochpaßverhalten beim RC-Fall. Außerdem lassen sich jetzt statt einem negativ reellem Pol bei bestimmten Verhältnissen der Bauelemente zueinander zwei konjugiert komplexe Pole erzeugen. Nur dieser Fall wird hier weiter betrachtet. Die Polstellen ergeben sich durch Nullsetzen der gleichen Nennerfunktionen zu

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

bzw. bei Erfüllung der Bedingung

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

zur Erzielung komplexer Pole

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (3.22a)$$

Im Bild 3.12 sind in der komplexen s-Ebene die Pole mit der fortan verwendeten Bezeichnung dargestellt.

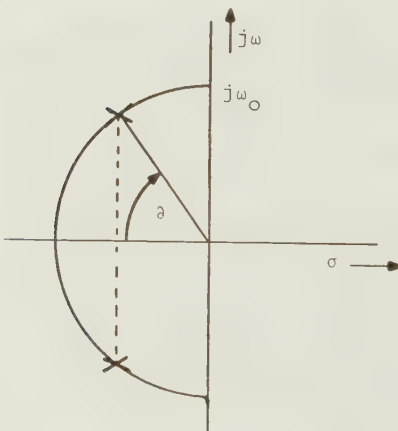


Bild 3.12 Pole der Systeme H_1, H_2

Mit dem Betrag der Pole $|s_{\infty 1,2}| \stackrel{!}{=} \omega_0$ und dem "Polwinkel ϑ " läßt sich Gl. (3.22a) in der Form

$$s_{\infty 1,2} = -\omega_0 \cos \vartheta \pm j \omega_0 \sin \vartheta = \omega_0 (\cos \vartheta \pm j \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}) \quad (3.22b)$$

schreiben. Die beiden Parameter ω_0 und ϑ legen also die Polstellen eindeutig fest. Zu den Bauelementen R , L , C bestehen dann folgende Relationen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \cos \vartheta = \frac{R}{2 \sqrt{L/C}}; \quad T = RC = \frac{2}{\omega_0} \cos \vartheta \quad (3.23)$$

Um die Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$ zu bestimmen, ist es erforderlich $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega)\}$ anzugeben, welches dann mit der dreieckförmigen AKF gefaltet wird.

Für $s = j\omega$ wird für das Produkt mit Gl. (3.21)

$$H_1(j\omega) H_2^*(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(-\omega^2 + j2\omega \cdot \omega_0 \cos \vartheta + \omega_0^2)} \cdot \frac{\omega_0^2 (-j\omega) \cdot T}{(-\omega^2 - j2\omega \cdot \omega_0 \cos \vartheta + \omega_0^2)}$$

erhalten. Ausmultiplikation des Nenners führt zu

$$\begin{aligned} N(j\omega) &= \omega^4 - 2\omega^2 \omega_0^2 + \omega_0^4 \cos^2 \vartheta + \omega_0^4 \\ &= \omega^4 + 2\omega_0^2 \omega^2 (2\cos^2 \vartheta - 1) + \omega_0^4 \end{aligned}$$

Mit der Äquivalenz $\cos 2\vartheta = (2\cos^2 \vartheta - 1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega) &= \frac{\omega_0^4 \cdot T(-j\omega)}{\omega^4 + 2\omega_0^2 \omega^2 \cos 2\vartheta + \omega_0^4} \\ &= \omega_0^4 \cdot T(-j\omega) \cdot \frac{1}{\omega^4 + 2\omega_0^2 \omega^2 \cos 2\vartheta + \omega_0^4} = \omega_0^4 \cdot T(-j\omega) \cdot H_g(\omega) \end{aligned}$$

Die Aufspaltung erfolgt deshalb, weil der gebrochene rationale Teil $H_g(\omega)$ der Funktion bezüglich der Rücktransformierten in [52] tabelliert ist. Anschließende Differentiation und Bewertung mit den Konstanten ergibt $h(t)$.

Aus 1. Zeile S. 5 [52] läßt sich

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_g(\omega)\} = h_g(t) = \frac{1}{2\omega_0^3 \sin 2\vartheta} \cdot e^{-\omega_0 t \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_0 t \cdot \sin \vartheta)$$

für positive t bestimmen. Es gilt $h_g(t) = h_g(-t)$, da $H_g(\omega)$ reell und gerade ist. Die zu suchende Funktion $h(t)$ wird durch die Differentiation ungerade in t . Sie lautet

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2 \sin \vartheta} \cdot e^{-\omega_0 |t| \cos \vartheta} \cdot \sin(\omega_0 t \sin \vartheta) \quad (3.24)$$

wobei die Vorzeichenumkehr der Funktionswerte für negative t durch die ungerade Sinusfunktion erfolgt. Bild 3.13 zeigt den Verlauf von $h(t)$ für die angegebenen Polwinkel im Vergleich zu $h(t)$ des RC-Filterpaares. Dabei wird $\omega_0 = \frac{1}{T_{RC}} = \text{const}$ angenommen und nur ϑ variiert. Die zu vergleichenden Funktionen liegen damit für nur positive t in folgender Form vor [Gl. (3.15) und (3.24)]:

$$h(t)_{RC} = \frac{1}{2T} \cdot e^{-t/T}$$

$$h(t)_{RLC} = \frac{1}{2T \sin \vartheta} \cdot e^{-\frac{t}{T} \cos \vartheta} \cdot \sin\left(\frac{t}{T} \cdot \sin \vartheta\right)$$

Für den Verlauf der Diskriminator Kennlinie, welche durch Faltung der AKF (Dreieck) mit der Impulsantwort des Filterpaares entsteht, spielt u.a. die Fläche $F = \int_0^\infty h(t) dt$ unter der Impulsantwort eine Rolle. Diese soll möglichst groß werden. Beim RC-Filterpaar ergibt sich mit Gl. (3.15)

$$F_{RC} = \frac{1}{2T} \int_0^\infty e^{-t/T} dt = \frac{1}{2} \quad \forall T$$

Die Optimierung bezüglich maximaler Kreuzkorrelierten $A(\varepsilon)$ war hier durch Verlagerung der partiellen Flächen von $h(t)$ längs der Zeitachse möglich, d.h. das Verhältnis T/T_c (Lage von $h(t)$ zur AKF) konnte optimiert werden. Beim hier vorliegenden RLC-Filterpaar besitzt man nun zwei Freiheitsgrade für $h(t)$, nämlich Polbetrag ω_0 und Polwinkel ϑ . Die Fläche in diesem Fall errechnet sich mit Gl. (3.24) zu:

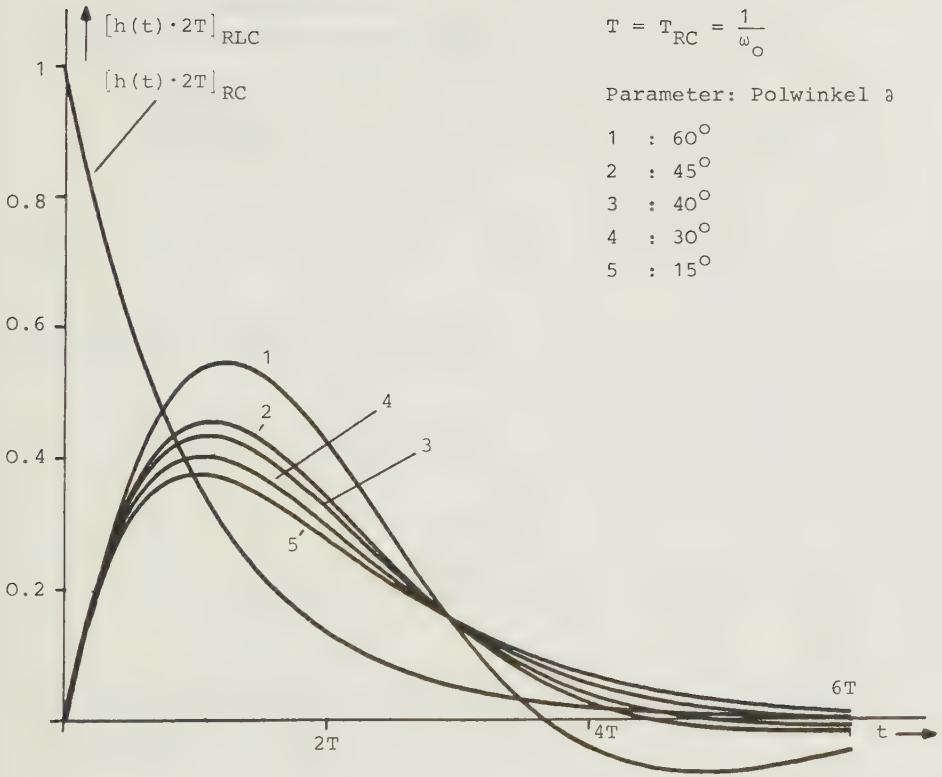


Bild 3.13 Normierte Impulsantworten von RC- bzw. RLC-Filterpaar mit dem Polwinkel als Parameter

$$F_{RLC} = \frac{\omega_0}{2\sin\vartheta} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 t \cdot \cos\vartheta} \cdot \sin(\omega_0 t \cdot \sin\vartheta) dt$$

Das Integral ist in [10] Nr. 459 tabelliert,

$$F_{RLC} = \frac{-\omega_0}{2\sin\vartheta} \cdot \frac{1}{\omega_0} e^{-\omega_0 t \cdot \cos\vartheta} \cdot \sin(\omega_0 t \cdot \sin\vartheta + \vartheta) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

d.h. unabhängig von ϑ und ω_0 ergibt sich der gleiche Wert wie beim RC-Filterpaar. Mit steigenden Polwinkeln ϑ zeigt

die Impulsantwort ein wachsendes Überschwingen, d.h. die Zeitachse wird mehrmals geschnitten. Dieses Verhalten ist prinzipiell dann auch bei der Kreuzkorrelierten $A(\varepsilon)$ vorhanden, so daß man bei Vermeidung des Effektes maximale Polwinkel um etwa 40° zulassen kann.

Somit bleibt als wesentlicher Optimierungsparameter nach Festlegung von ϑ nur der Polbetrag ω_0 übrig, der im wesentlichen die Lage und Höhe der Impulsantwort $h(t)$ bestimmt. Den Einfluß von ω_0 zeigt Bild 3.14 für $\vartheta = 40^\circ$

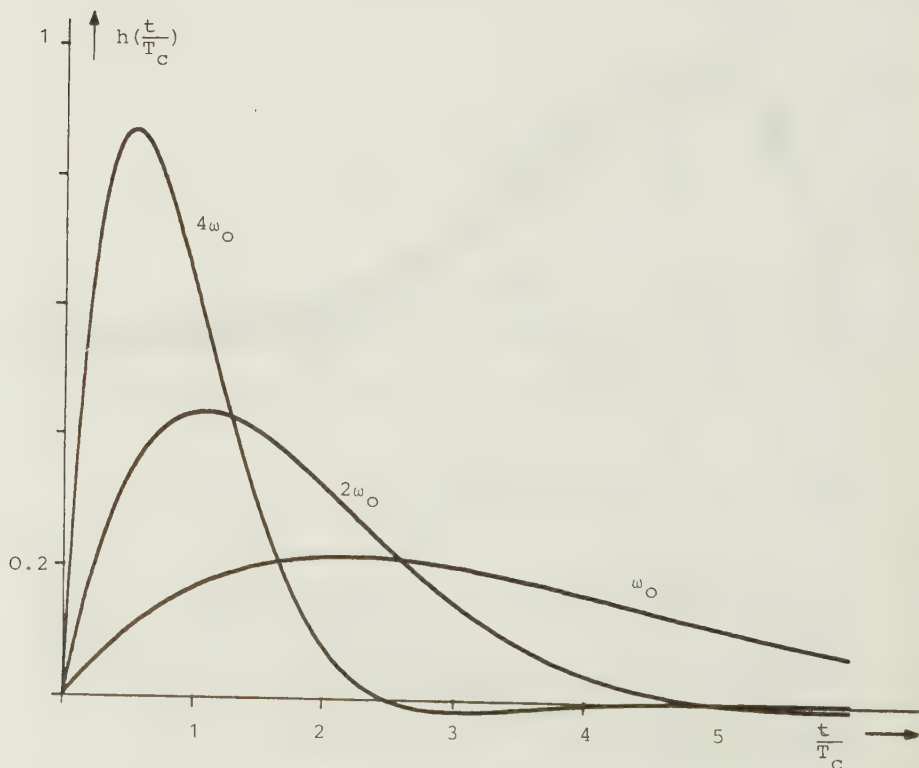


Bild 3.14 Abhängigkeit des Polbetrages ω_0 auf $h(t)$ bei $\vartheta = 40^\circ$

Um bezüglich des noch variablen Polbetrages ω_0 eine möglichst steile Kennlinie $A(\varepsilon)$ mit größter Amplitude zu erhalten, muß $A(\varepsilon)$ nach den Gln. (3.14) und (3.24) berechnet und dann optimiert werden.

$$A(\varepsilon) = \frac{\omega_0}{T_C 2 \sin \vartheta} \cdot e^{-\omega |\varepsilon| \cos \vartheta} \cdot \sin(\omega_0 \varepsilon \sin \vartheta) * \operatorname{rect} \frac{\varepsilon}{T_C} * \operatorname{rect} \frac{\varepsilon}{T_C} \quad (3.25)$$

Die Berechnung ist im Anhang A6 ausgeführt. Mit der Normierung $y = \frac{\varepsilon}{T_C}$ und $c = \omega_0 T_C$ ergibt sich die von der Verstimmung und dem Polbetrag des Filterpaares abhängige Diskriminatorkennlinie für positive y zu:

$$A(c, y) = \frac{-1}{2c \sin \vartheta} \left\{ \begin{array}{l} e^{-cc \cos \vartheta} [e^{cy \cos \vartheta} \cdot \sin \langle (1-y) c \sin \vartheta + 2\vartheta \rangle \\ - e^{-cy \cos \vartheta} \cdot \sin \langle (1+y) c \sin \vartheta + 2\vartheta \rangle] \\ - 2e^{-cy \cos \vartheta} \cdot \sin(cy \sin \vartheta + 2\vartheta) - 2 \sin 2\vartheta \\ \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ \hline e^{-cy \cos \vartheta} \cdot \{ e^{cc \cos \vartheta} \cdot \sin[(1-y) c \sin \vartheta - 2\vartheta] \\ + 2 \sin(cy \sin \vartheta + 2\vartheta) - e^{-cc \cos \vartheta} \cdot \sin[(1+y) c \sin \vartheta + 2\vartheta] \} \\ \text{für } 1 \leq y < \infty \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Das Funktionsbild ist in Bild 3.15 für festes $\omega_0 T_C = c = 3$ für verschiedene Polwinkel ϑ in Abhängigkeit der normierten Verstimmung dargestellt.

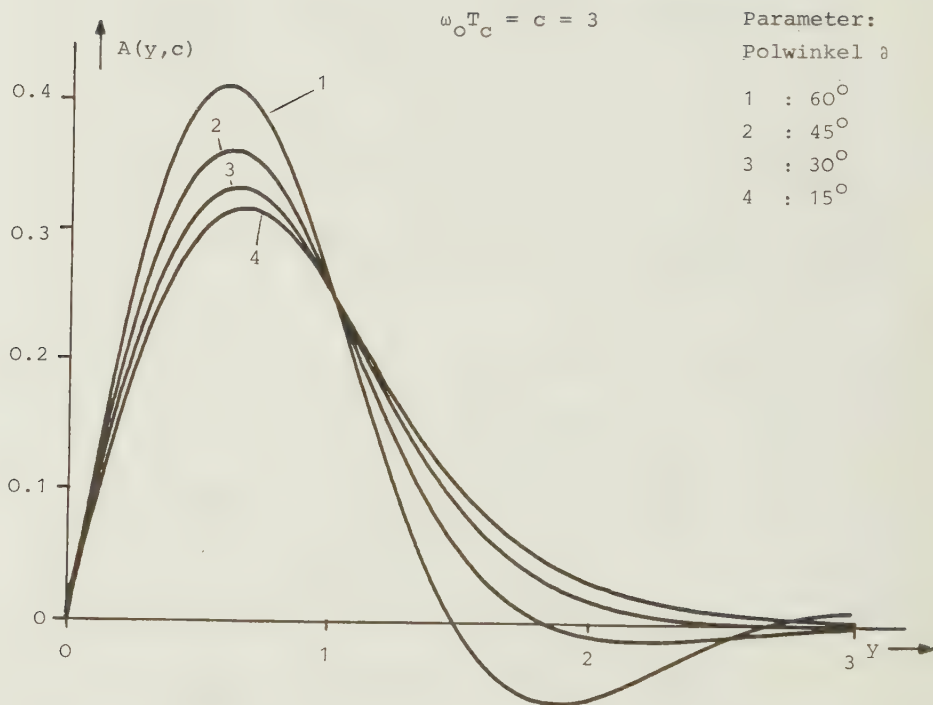


Bild 3.15 Kennlinie des RLC-Korrelators mit dem Polwinkel ϑ als Parameter

Das ansteigende Überschwingen mit wachsendem Polwinkel ϑ ist, wie schon bei der Impulsantwort $h(t)$ nach Bild 3.13 festgestellt, offensichtlich. Für praktische Anwendungen wird man deshalb etwa einen maximalen Polwinkel von $\vartheta \approx 40^\circ$ zulassen können. Für $\vartheta = 40^\circ$ zeigt Bild 3.16 die auf die normierte Variable y bezogene Kennlinie in Abhängigkeit des noch zu optimierenden normierten Polbetrages c .

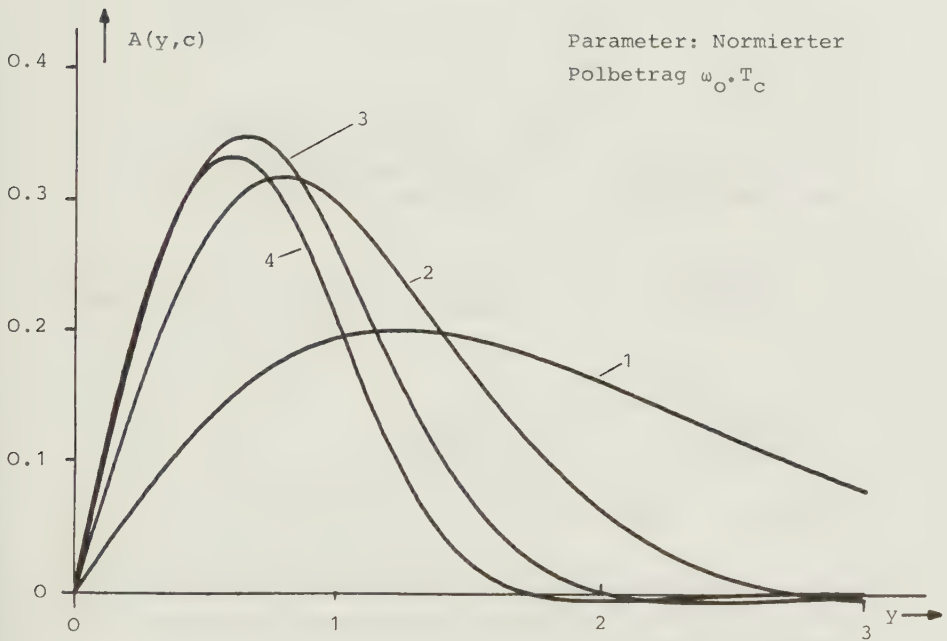


Bild 3.16 Abhängigkeit vom Polbetrag bei festem
Polwinkel $\vartheta = 40^\circ$

Die Darstellung läßt vermuten, daß sich eine maximal große Regelkennlinie für c im Bereich 2 ... 4 ergeben wird, wobei die Steigung um $y \approx 0$ unwesentliche Änderungen erfährt. Bei der Bildung des totalen Differentials $dA(c, y) = \frac{\partial A}{\partial c} dc + \frac{\partial A}{\partial y} dy$ treten unübersichtlich lange Beziehungen auf, die bei der Maximumssuche Lösung zweier transzendenter Gleichungen erfordert. Auf eine Darstellung wird hier verzichtet. Für einen Polwinkel von $\vartheta = 40^\circ$ wurde das zugehörige c_{opt} ermittelt zu:

$$c_{\text{opt}} = 3,021441851 \quad .$$

Ebenso ergibt sich die Lage und Höhe des Maximums

$$y_{\max} = 0,645092941$$

$$A(y_{\max}, c_{\text{opt}}) = 0,348152226$$

d.h. der RLC-Filter-Korrelator bringt eine Erhöhung um ca. 39,5% gegenüber der RC-Anordnung. Die Steigung in der Nähe des Nullpunktes errechnet (s. A. 6.5) sich zu:

$$\left. \frac{dA(\epsilon, c_{\text{opt}})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{-1}{T_C \sin \vartheta} \{ e^{-c \cos \vartheta} \cdot \sin(c \sin \vartheta + \vartheta) - \sin \vartheta \}$$

und beträgt für $\vartheta = 40^\circ$ und c_{opt}

$$\left. \frac{dA(\epsilon, c_{\text{opt}})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{0,926124951}{T_C}.$$

Sie ist also etwa 10,7% größer als beim RC-Filterpaar.

Bild 3.17 zeigt die Gegenüberstellung der optimierten Regelkennlinien für das RC- und das RLC-Filterpaar für $\vartheta = 40^\circ$ im letztgenannten System.

Zur Absicherung der theoretischen Ergebnisse wurden in einem Meßaufbau (s. Kap. 3.3, Bild 3.25) für PN-Folgen der Länge $p = 63$ die Kennlinien dynamisch bestimmt. Die Chipzeit betrug $T_C = 1,2$ ms, d.h. die PN-Generatoren vom Typ hp 3722 A wurden mit 833 Hz getaktet. Im RC-Fall betrug die Zeitkonstante der Filter $T = 0,6595$ ms, d.h. es lag ein $b = 1,819$ in der Nähe des b_{opt} vor. Beim RLC-Filtersystem dienten Elemente mit $L = 0,1$ H, $C = 1,319$ μF und $R = 450$ Ω zum Aufbau. Es ergaben sich nach Gl. (3.23) die Werte $c = \omega_0 T_C = 3,3$ und $\vartheta = 39,1^\circ$, somit wurden hier ebenfalls die für festes ϑ annähernd optimalen Werte realisiert. Die Darstellung der Ergebnisse zeigt Bild 3.18, wobei zu erwähnen ist, daß durch die Art der dynamischen Messung (Änderung der Phase der Taktfrequenz $f_c = \frac{1}{T_C}$) die Abzisse keine lineare Teilung aufweist. Relativer Vergleich der Maximalwerte bei den Bildern 3.17 und 3.18 zeigt eine gute Übereinstimmung.

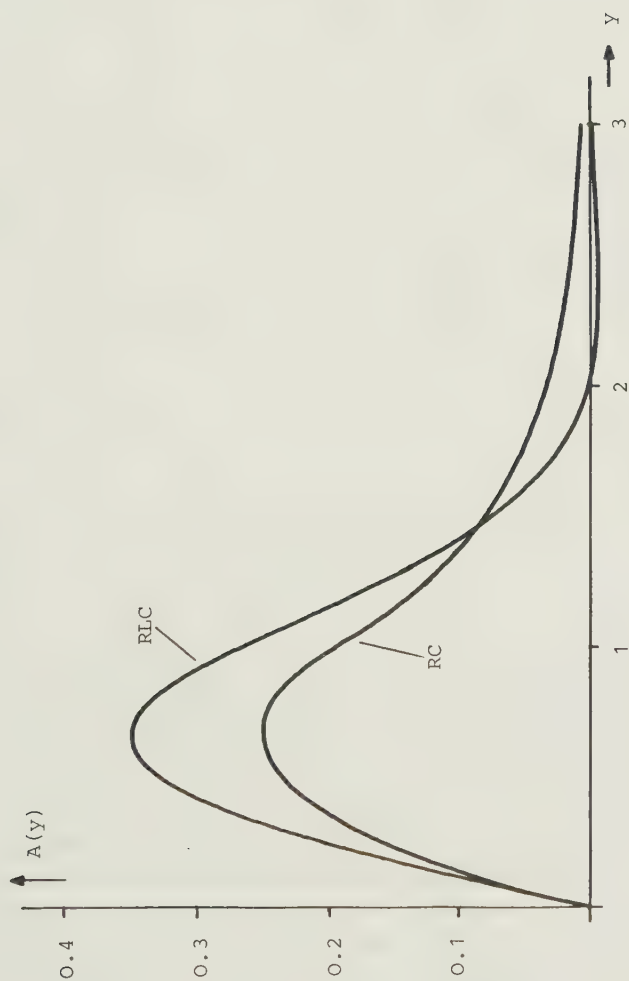


Bild 3.17 Optimierte Diskriminatorkennlinie für Filterpaar
1. und 2. Ordnung

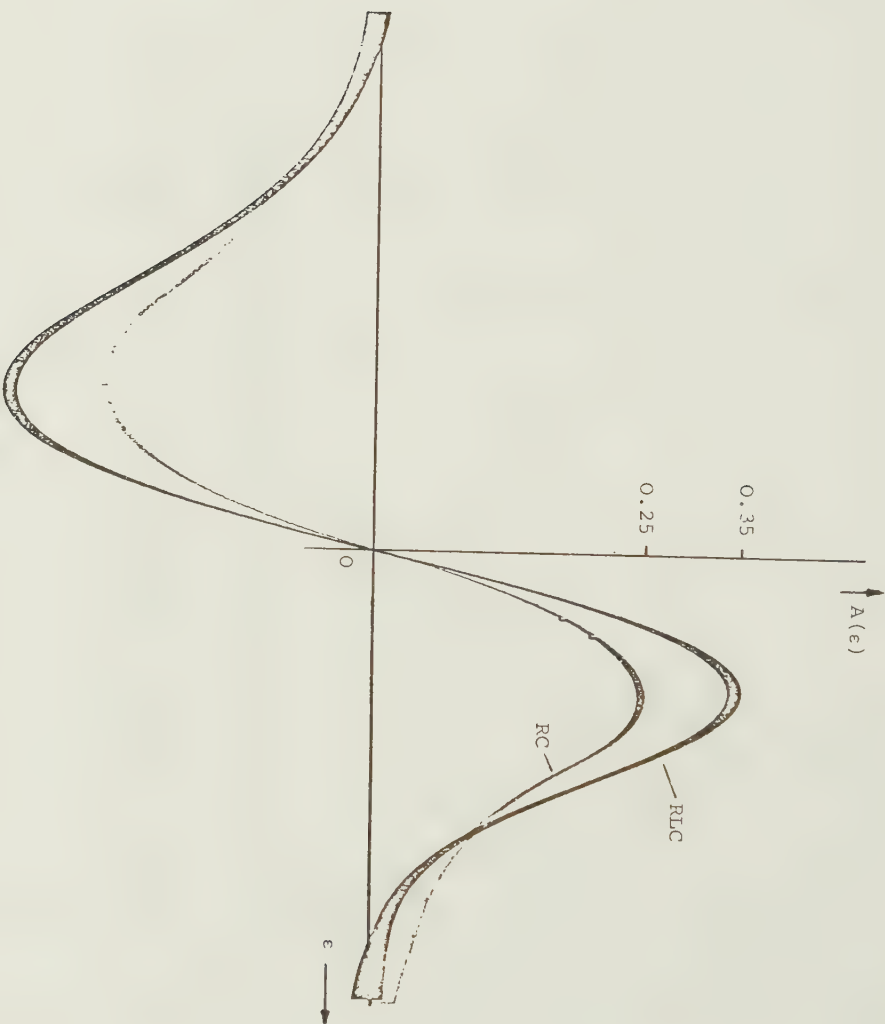
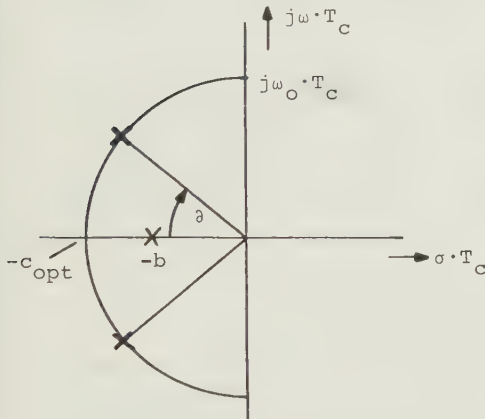


Bild 3.18 Meßergebnis für die Diskriminatorcharakteristik
beim annähernd optimalen RC- und RLC-Filterpaar

Für die bisher angesprochenen Filterpaare 1. und 2. Ordnung ist die auf die Taktfrequenz T_C = Chipbreite normierte Polstellenlage der Filter $H_1(j\omega)$ im folgenden Bild 3.19 aufgeführt.



RLC: Konjugiert kompl.
Polpaar mit $c = 3,02..$
und $\vartheta = 40^\circ$

RC: Negativ reeller Pol
bei $b = 1,81..$

Bild 3.19 Polstellenlage der optimierten Filter 1. und 2. Ordnung für den Korrelator

Um nun eine weitere Erhöhung der Diskriminatorkennlinie zu erreichen, wäre prinzipiell eine Möglichkeit durch Vergrößern des Polwinkels ϑ beim Filter 2. Ordnung gegeben. Dann werden allerdings die Überschwinger bei der Impulsantwort $h(t)$ und somit auch bei der Regelkennlinie größer, wodurch die Gefahr einer Fehlsynchronisation (False Lock) wächst. Erhöhung des Filtergrades um einen negativ reellen Pol wie in der Gesamtdarstellung nach Bild 3.19 kann bezüglich der unerwünschten Überschwinger Abhilfe schaffen. Ein solches System mit bestimmten Eigenschaften für die Sprungantwort (Rechteckantwort) wird im folgenden vorgestellt. Dabei dienen die von Petersen in [53], [54] dargestellten Überlegungen als Basis. Er beschreibt RLC-Netzwerke mit bezüglich der Sprungantwort günstigen impulsformenden Eigenschaften.

3.3.3 Impulsformer

Durch geeignetes Zuschalten eines weiteren Kondensators C_I bei den in Bild 3.11 gezeigten Filtern 2. Ordnung entsteht ein Filterpaar 3. Grades (Bild 3.20)

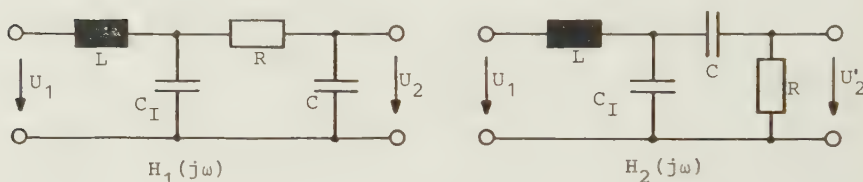


Bild 3.20 Tiefpaß H_1 und Bandpaß H_2 vom Grad 3

Die beiden Filter dürfen allerdings ausgangsseitig nicht belastet werden, was sich praktisch leicht durch hochohmige Trennverstärker realisieren läßt. Analyse für die komplexe Frequenz $s = \sigma + j\omega$ führt auf die beiden Übertragungsfunktionen in folgender Form

$$H_1(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s^3 L C C_I R + s^2 L [C_I + C] + s R C + 1} \quad (3.27a)$$

$$H_2(s) = \frac{U'_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s R C}{s^3 L C C_I R + s^2 L [C_I + C] + s R C + 1} \quad (3.27b)$$

Offenbar ist die Bedingung $H_2(s) = s \cdot T \cdot H_1(s)$ mit $T = RC$ für die Erzeugung einer orthogonalen Korrelationsfunktion erfüllt.

Für das Filter $H_1(s)$ dritten Grades wird nun die Polkonfiguration so gewählt, daß die Sprungantwort möglichst schnell ein vorgegebenes Toleranzgebiet verläßt und in einen anderen begrenzten Toleranzschlauch einschwingt, wobei zusätzlich Anforderungen an den Frequenzgang gestellt werden, s. [54]. Das folgende Bild 3.21 zeigt die erwähnten Toleranzgrenzen und die weiteren wesentlichen Kennwerte.

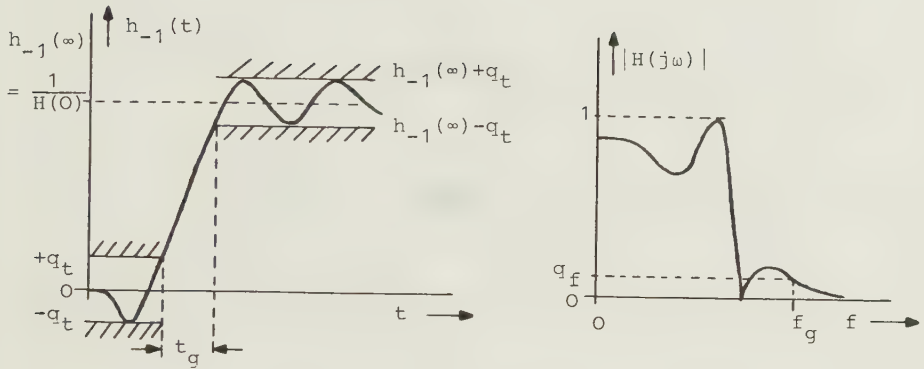


Bild 3.21 Sprungantwort und Frequenzgang eines Tiefpaß-Impulsformers nach [53]

Das in [53] beschriebene Zeit-Bandbreiteprodukt ist mit $M = t_g \cdot f_g$ definiert. Für Filter 3. Grades kommen nach [53] nur 4 Systeme in Frage, die nachfolgend tabellarisch aufgeführt sind:

Impulsformer	M	c_1	ℓ_2	c_3
30. 5.10	3,395	13,3	5,789	2,602
30.10.10	2,9405	12,5	5,588	2,898
30.20.10	2,4809	11,59	5,258	3,362
30.50.10	1.8583	9,849	4,581	4,619

Bei der Bezeichnung der Impulsformer bedeuten die Kennziffern mit n = Nennergrad und m = Zählergrad

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \overbrace{3 \ 0} & \cdot & \overbrace{5} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 n=3 & & 1000 \cdot q_t
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 & & \overbrace{1 \ 0} \\
 & & \uparrow \\
 & & 1000 \cdot q_f
 \end{array}
 \end{array}$$

$m=0$

Die c_1 , ℓ_2 , c_3 stellen die auf eine frei wählbare Betriebsfrequenz f_B normierten Bauelemente dar, mit

$$C_{1,3} = c_{1,3} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f_B \cdot R_B} ; \quad L_2 = l_2 \cdot \frac{R_B}{2\pi \cdot f_B} \quad (3.28)$$

und R_B als ebenfalls frei zu wählender Betriebswiderstand des impulsformenden Filters, s. Bild 3.22.

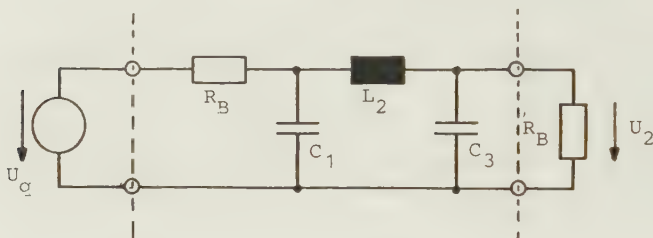


Bild 3.22 Impulsformer 3. Grades nach [54]

Schaltungsanalyse ergibt die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_q(s)} = \frac{1}{s^3 L_2 C_1 C_3 R_B + s^2 L_2 [C_1 + C_3] + s \left[\frac{L_2}{R_B} + R_B (C_1 + C_3) \right] + 2} \quad (3.29)$$

Um für $s = j0$ gleiche Werte der Übertragungsfunktionen der nach Gln. (3.27a) und (3.29) bestimmten Beziehungen zu erhalten, wird die Schaltung nach Bild 3.22 mit einem zusätzlichen Verstärker mit $V=2$ versehen. Es gilt dann:

$$H_1(s) = V \cdot H(s) = 2 \cdot H(s) \quad .$$

Zur Ermittlung der vier Elemente R , L , C_I , C von $H_1(s)$ der Gl. (3.27a) stehen nur drei Gleichungen (s : linear, quadratisch und kubisch) zur Verfügung, d.h. ein Schaltungselement für $H_1(s)$ kann (sinnvoll) frei gewählt werden.

Erweiterung von Gl. (3.27a) mit 2 und Koeffizientenvergleich der von s abhängigen Terme mit Gl. (3.29) führt auf:

$$s^3: L C_I \cdot 2RC = L_2 \cdot C_1 C_3 \cdot R_B \quad (3.30a)$$

$$s^2: 2L[C_I + C] = L_2[C_1 + C_3] \quad (3.30b)$$

$$s: 2RC = \frac{L_2}{R_B} + R_B[C_1 + C_3] \quad (3.30c)$$

Um einen direkten Vergleich mit denen durch den Katalog [54] ausgewiesenen normierten Werten ℓ_2 , c_1 , c_3 zu erhalten, werden die rechten Seiten der Gl. (3.30) mit der Gl. (3.28) weiter umgeformt, wobei $2\pi \cdot f_B = \omega_B$ gesetzt wird.

Nach freier Wahl von L errechnen sich dann die übrigen Elemente nach den folgenden Beziehungen:

$$C_I = \frac{c_1 \ell_2 c_3}{c_1 + \ell_2 + c_3} \cdot \frac{1}{\omega_B^2 \cdot L} \quad (3.31)$$

$$C = \frac{1}{\omega_B^2 \cdot L} \cdot \frac{\ell_2 [c_1 + c_3]}{2} - \frac{c_1 \ell_2 c_3}{c_1 + \ell_2 + c_3} \quad (3.32)$$

$$R = \frac{c_1 + \ell_2 + c_3}{2\omega_B \cdot C} = \frac{(c_1 + \ell_2 + c_3)^2 \cdot \omega_B \cdot L}{\ell_2 [c_1^2 + c_1 \ell_2 + c_3 \ell_2 + c_3^2]} \quad (3.33)$$

Werden die Elemente R , C , C_I nach Wahl von L bei gewünschter Frequenz $f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$ durch die dem Katalog [54] entnehmbaren normierten Werte c_1, ℓ_2, c_3 bestimmt, so hat $H_1(s)$ bis auf den Faktor 2 genau die Übertragungsfunktion von $H(s)$ und zeigt damit das günstige Sprungübertragungsverhalten, d.h. die Überschwinger bleiben innerhalb fester, vorher vorgegebbarer Toleranzen. Die normierte Polstellenlage ist bereits berechnet und kann ebenfalls dem Katalog [54] entnommen werden. Beispielsweise ergibt sich für den Impulsformer 30.10.10 die auf die Betriebsfrequenz f_B normierte Polstellenlage ($s_n = \frac{s}{2\pi f_B}$) zu

$$H_1(s_n) = K \cdot \frac{1}{(s_n - s_{n\infty 1})(s_n - s_{n\infty 1}^*)(s_n - s_{n\infty 2})} \cdot$$

Die normierten Pole betragen

$$s_{n\infty 1} = -0,1316409 - j 0,209159$$

und $s_{n\infty 2} = -0,1617321$, die Konstante K liegt mit

$$K = 0,9878081362 \cdot 10^{-2}$$

fest. Bild 3.23 zeigt die Poldarstellung von $H_1(s_n)$ für diesen Fall.

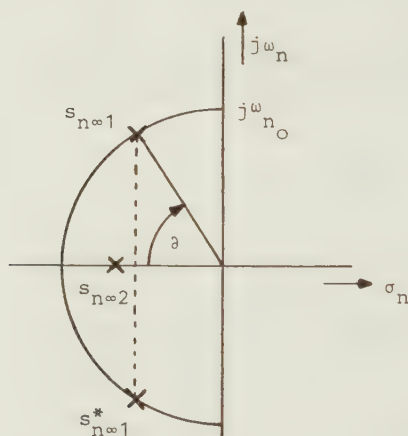


Bild 3.23 Normierte Polstellenlage für $H_1(s_n)$, als Impulsformer 3. Grades dimensioniert

Der Polwinkel beträgt in diesem Fall $\vartheta = 57,81^\circ$. An der Lage der drei Pole relativ zueinander kann nichts geändert werden, wenn das Netzwerk nicht die guten Sprungübertragungseigenschaften verlieren soll. Als freier Parameter bezüglich der optimalen Diskriminatorkennlinie bleibt nur die Betriebsfrequenz f_B , welche in der absoluten Polstellenlage eine Dehnung oder Stauchung der durch Bild 3.23 dargestellten Pollage bewirkt. Die zur analytischen Ermittlung der Kreuzkorrelierten $A(\varepsilon)$ erforderliche Impulsantwort $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega)\}$ ist hier bereits 6. Grades. Sie kann mit Hilfe bekannter Teilergebnisse bei geschickter

Zerlegung wie folgt bestimmt werden.

$$H_1(s_n) = \frac{K}{(s_n - s_{n\infty 1}) \cdot (s_n - s_{n\infty 1}^*) \cdot (s_n - s_{n\infty 2})}$$

$$H_1(s) = \frac{K \cdot \omega_B^2}{(s - s_{\infty 1}) (s - s_{\infty 1}^*)} \cdot \frac{\omega_B}{(s - s_{\infty 2})}$$

$$\text{mit } s_{\infty 1,2} = s_{n\infty 1,2} \cdot \omega_B$$

$$H_2(s) = s \cdot RC \cdot H_1(s) = s \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2\omega_B} \cdot H_1(s)$$

Somit wird für $s = j\omega$

$$H_1(j\omega)H_2^*(j\omega) = K^2 \omega_B^4 \cdot \frac{1}{(j\omega - s_{\infty 1}) (j\omega - s_{\infty 1}^*) (-j\omega - s_{\infty 1}) (-j\omega - s_{\infty 1}^*)} \cdot (-j\omega) \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2\omega_B} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega^2 + |s_{\infty 2}|^2}$$

Beim Übergang auf Polwinkel ϑ und Polbetrag ω_0 der konjugiert komplexen Pole $s_{\infty 1}$ und $s_{\infty 1}^*$ gilt wie beim RLC-Filter des vorigen Kapitels mit $\omega_0 = |s_{n\infty 1}| \cdot \omega_B$

$$\begin{aligned} H_1(\omega)H_2^*(j\omega) &= \frac{1}{\omega^4 + 2\omega^2 \omega_0^2 \cos 2\vartheta + \omega_0^4} \cdot K^2 \cdot \omega_B^4 \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2\omega_B} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega^2 + |s_{\infty 2}|^2} (-j\omega) \\ &= H_g(\omega) \omega_0^4 (-j\omega) \cdot \frac{K^2}{|s_{n\infty 1}|^4} \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2} \cdot \frac{\omega_B}{\omega^2 + |s_{\infty 2}|^2} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gln. (3.23) und (3.24) ergibt sich die Rücktransformierte $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)\}$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{K^2}{|s_{n\infty 1}|^4} \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2} \cdot \frac{\omega_0}{2\cos\vartheta} \cdot \left[\frac{\omega_0}{2\sin\vartheta} \cdot e^{-\omega_0|t|\cos\vartheta} \cdot \sin(\omega_0 t \sin\vartheta) \right] \\ &\quad * \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\omega_B}{\omega^2 + |s_{\infty 2}|^2} \right\} \end{aligned}$$

Der letzte Term in dieser Gleichung wird mit der Transformationstabelle S. 148 aus [76] zu

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\omega_B}{\omega^2 + |s_{\infty 2}|^2} \right\} = \frac{\omega_B}{2|s_{\infty 2}|} \cdot e^{-|s_{\infty 2}| \cdot t} \quad \text{erhalten.}$$

Damit gilt weiter:

$$h(t) = \frac{K^2 (c_1 + l_2 + c_3) \cdot \omega_B^2}{|s_{n\infty 1}|^2 \cdot |s_{n\infty 2}| \cdot 8 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot [e^{-\omega_0 |t| \cos \vartheta} \cdot \sin(\omega_0 t \sin \vartheta)] \cdot e^{-|s_{\infty 2}| \cdot t} \quad (3.34)$$

Die Werte $c_{1,2}$, l_2 , $s_{n\infty 1}$, $s_{n\infty 2}$ und K sind direkt dem Katalog [54] entnehmbar, der Polwinkel ϑ ist mit

$$\vartheta = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{s_{n\infty 1}\}}{\operatorname{Re}\{s_{n\infty 1}\}}$$

der Polbetrag

$$\omega_0 = |s_{n\infty 1}| \cdot \omega_B$$

und der negativ reelle Pol $s_{\infty 2}$ ist zu

$$s_{\infty 2} = s_{n\infty 2} \cdot \omega_B$$

berechenbar. Die Ausführung der Faltung ist im Anhang A7 dargestellt. Sie liefert für die Impulsantwort $h(t)$ eines nach [54] katalogisierten Impulsformers 3. Grades:

$$h(t) = K \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{8 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot \omega_B \cdot \left\{ e^{-\omega_B \cdot t \cdot \alpha} \left[\frac{\sin(\omega_B \cdot t \cdot \beta + \psi_1)}{\sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2}} - \frac{\sin(\omega_B \cdot t \cdot \beta + \psi_2)}{\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2}} \right] - \beta \cdot e^{-\omega_B \cdot t \cdot \gamma} \cdot \left[\frac{1}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2} - \frac{1}{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \right] \right\}$$

(3.35)

Wie durch Einsetzen von $t=0$ zu prüfen ist, wird $h(0) = 0$. Die Werte $\alpha = |\operatorname{Re}\{s_{n\infty 1}\}|$; $\beta = |\operatorname{Im}\{s_{n\infty 1}\}|$; $\gamma = |s_{n\infty 2}|$, c_1, c_2, c_3 sind direkt dem Katalog [54] entnehmbar, ψ_1, ψ_2 und ϑ lassen sich wie in A7 dargestellt aus α, β und γ berechnen. Bild 3.24 zeigt die Impulsantworten des Systems 3. Grades für verschiedene Parameterwerte $d = \omega_B \cdot T_C$, d.h. die auf die Taktfrequenz normierte Betriebsfrequenz.

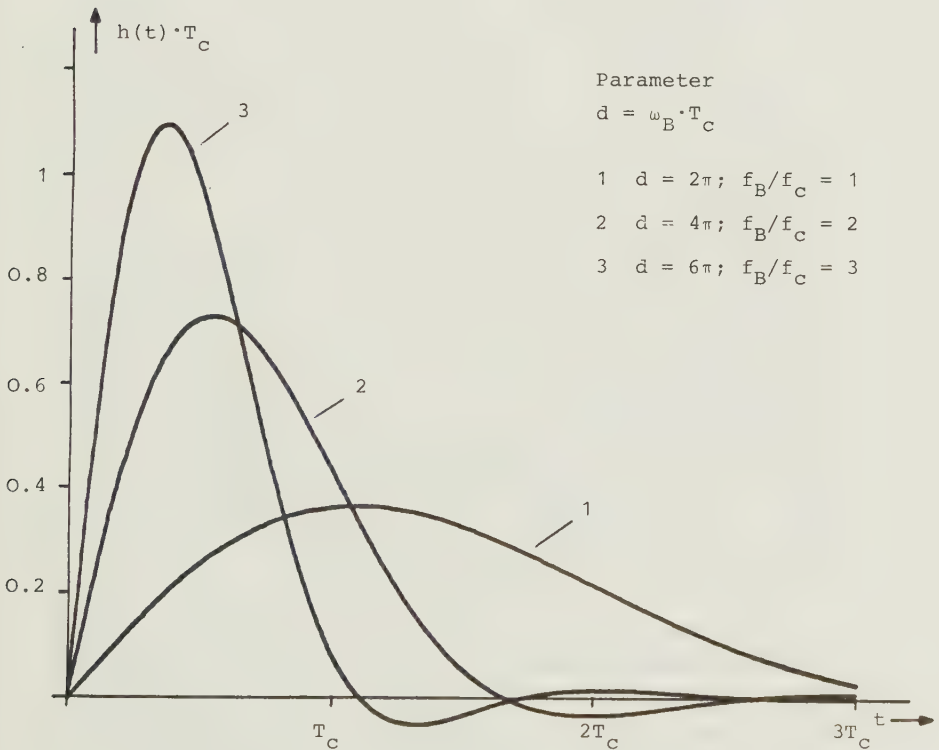


Bild 3.24 $h(t)$ des Impulsformers 30.10.10 mit $\omega_B \cdot T_C$ als Parameter

Um eine maximal große Kreuzkorrelierte zu erhalten, wäre nun die durch Gl. (3.35) beschriebene Impulsantwort $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)\}$ mit der dreieckförmigen AKF der verwendeten Signale $s(t)$ zu falten und bezüglich ω_B zu optimieren. Wie schon bei der vergleichsweise einfachen Impulsantwort des RLC-Systems zu ersehen war, ergeben sich bei der Faltungsintegration lange und unübersichtliche Ausdrücke, die hier beim Impulsformersystem einen unvertretbar hohen Rechenaufwand darstellen. Aus diesem Grunde wurde hier die Optimierung des ω_B meßtechnisch mit einem Aufbau (Bild 3.25) vorgenommen, der schon die Übereinstimmung von Messung und Rechnung bei den Systemen 1. und 2. Grades zeigte. Als Signale $s(t)$ dienten zwei gegenander verschiebbare PN-Folgen mit $a_v \in \{-1, 1\}$ der Länge $p = 63$, welche von zwei gleichen hp-Generatoren des Typs HOI-3722 A durch externe Taktung mit $f_C = \frac{1}{T_C} = 833 \text{ Hz}$ erzeugt wurden. Die beiden Filter nach Bild 3.20 wurden mit Dekaden und nachfolgenden hochohmigen Trennverstärkern aufgebaut. Die Multiplikation übernahm ein Analogbaustein mit einer Bandbreite von 200 kHz. Um eine Verschiebung der beiden Folgen $s(t)$ um mehr als eine Chipbreite $T_C (\hat{=} 2\pi)$ möglich zu machen, wurde ein PLL mit zwei Teilern 9:1 mit CMOS-Elementen aufgebaut. Der PLL synchronisiert die beiden Taktfrequenzen der PN-Generatoren mit einstellbarer Phasenverschiebung im Bereich von etwa $\pm 9\pi$ zueinander. Zur Erzeugung der Taktfrequenz und als Sägezahn-generator dienten Funktionsgeneratoren vom Typ Wavetek 142. Bild 3.25 zeigt den Meßaufbau.

Der zur Wobbelung dienende Sägezahn-generator wurde mit etwa 0,03 Hz betrieben. Dadurch gelingt es in ca. 33 Sekunden dynamisch die komplette Regelkennlinie des analogen Korrelators zu bestimmen. Systematische Variation der Elemente R , C_I , C bei den beiden Filtern H_1 und H_2 derart, daß sich pro Meßschrieb ein anderes ω_B ergab, führte zu dem Ergebnis, daß bei festem $T_C = 1,2 \text{ ms}$ sich für $f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} \approx 2,2 \text{ kHz}$ eine maximal große Kennlinie $A(\epsilon)$ einstellte. Der optimale Impulsformertyp wurde mit dem 30.10.10 nach [54] ermittelt. Die auf f_C

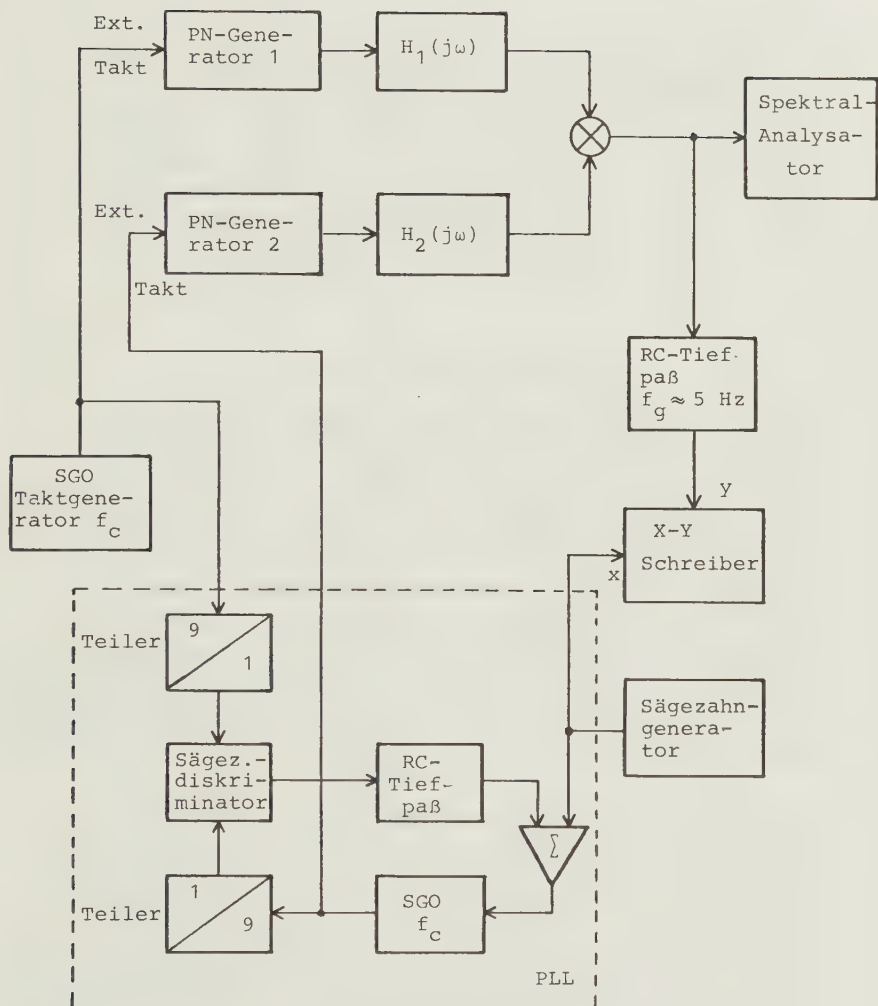


Bild 3.25 Meßaufbau zur Bestimmung der Regelkennlinie

normierte optimale Betriebskreisfrequenz liegt hier bei $d = \omega_B \cdot T_C \approx 16,588$. Der normierte Polbetrag der konjugiert komplexen Pole $\omega_O T_C$ hat den Wert $\omega_O T_C = |s_{n=1}| \cdot \omega_B \cdot T_C = 4,0995$, er ist also etwa 35,8% größer als beim optimalen RLC-System. Der Polwinkel beträgt $\vartheta = 57,8^\circ$, er ist also 44,5% größer als der beim System 2. Ordnung festgelegte Grenzwinkel ($\vartheta = 40^\circ$). Das Maximum der Kennlinie $A(\epsilon)$ erreicht bei Verwendung eines optimierten Impulsformers 30.10.10

$$\underline{A_{\max}(\epsilon) \approx 0,464}$$

d.h. diese Kennlinie ist um ca. 86% größer als die durch ein RC-Filterpaar (1.Ordnung-System) erreichbare, und sie hat einen um etwa 33% höheren Wert als die durch ein optimiertes System 2. Ordnung (RLC-Kreis) zu erhaltene KKF. Ein Vergleich mit dem durch einen nicht realisierbaren Hilbert-Transformator erreichbarem Maximum zeigt, daß der Impulsformer-Korrelator etwa 82,7% dieses Wertes erzeugt. Im nachfolgenden Bild 3.26 sind die Kennlinien des Impulsformer-Korrelators und des optimierten RC-Filterpaares dargestellt, wie sie sich durch Messungen mit dem vorher geschilderten Aufbau ergeben haben.

Der Versatz in den Nulllinien der Kennlinien gegenüber der Bezugslinie des X-Y-Schreibers ist durch einen Offset des verwendeten Multiplizierers zu erklären. Im Bild 3.27 sind zum Vergleich die Impulsantworten $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)\}$ aller drei bisher behandelten Systeme mit realisierbaren, auf maximale Amplitude der Diskriminator Kennlinie optimierten Filter gezeigt. Im Gegensatz zum Bild 3.13 erfolgt hier die Normierung auf die Chipzeit T_C .

Aus dem Verlauf dieser Impulsantworten, die notwendig ungerade in t sein müssen, um eine ungerade Regelkennlinie $A(\epsilon)$ zu erhalten, sind prinzipielle Schlüsse auf die durch Faltung mit der Signal-AKF zu erhaltene Diskriminator Kennlinie möglich: Starke Über- und Unterschwinger bei $h(t)$ erscheinen

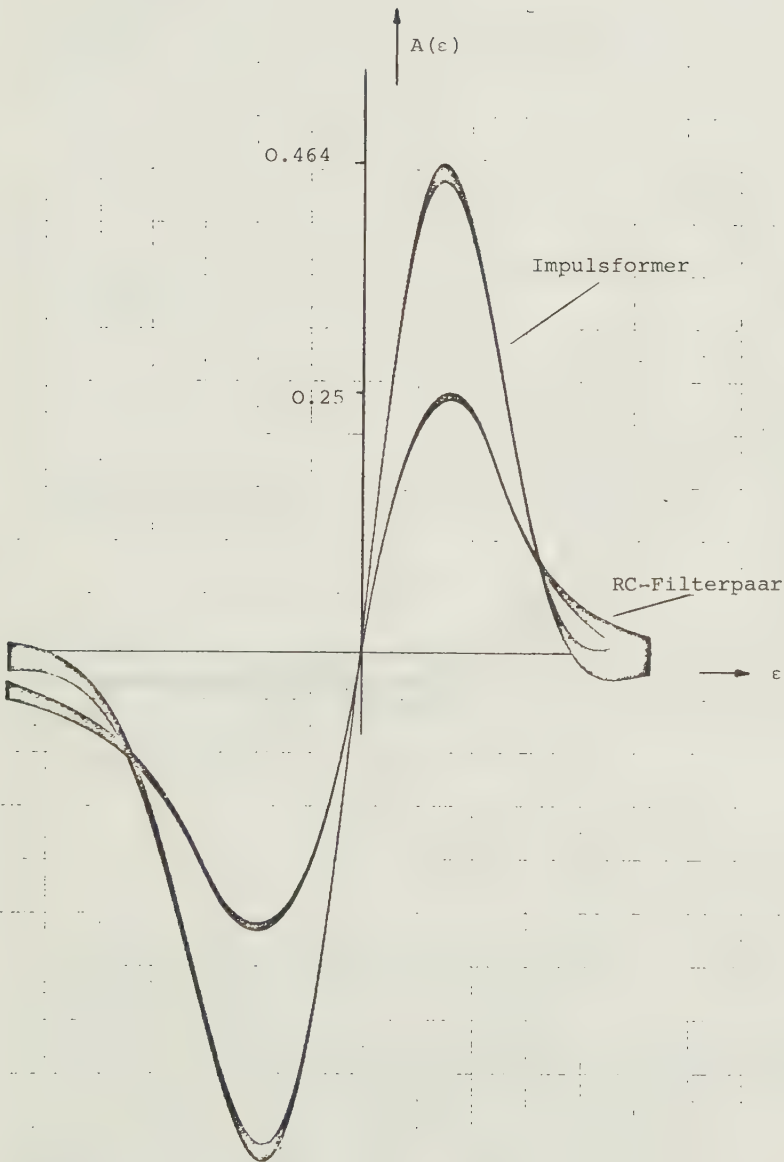


Bild 3.26 Messung der Regelkennlinien mit den optimierten Systemen 1. und 3. Ordnung

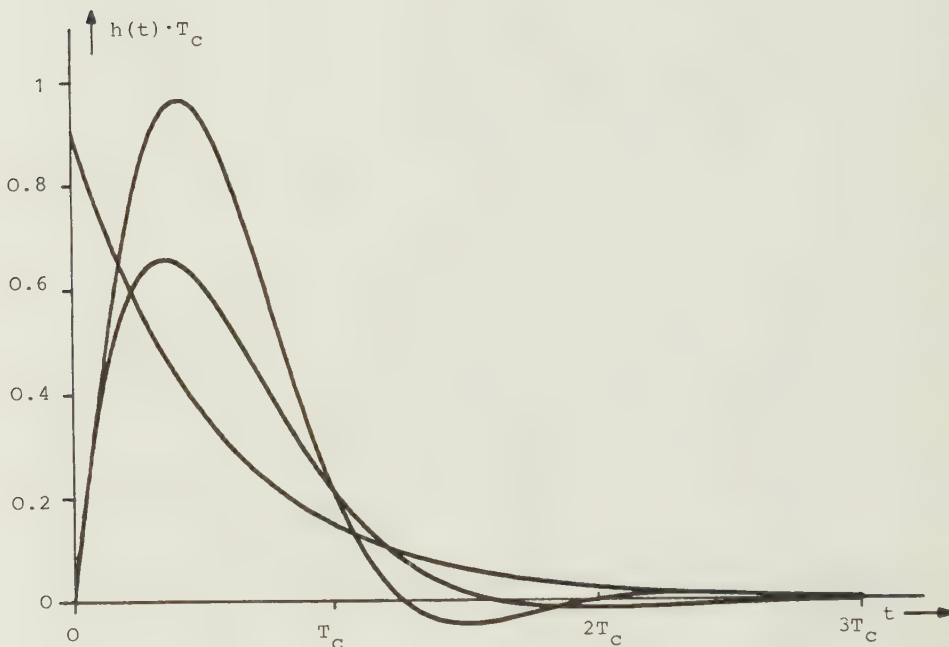


Bild 3.27 Impulsantworten für optimale Filterpaare
1., 2. und 3. Ordnung

auch in dem Faltungsprodukt. Je größer die Fläche oberhalb der t -Achse von $h(t)$ ist, umso höher wird das Maximum und die Steigung um $\epsilon \approx 0$ bei $A(\epsilon)$ sein. Ein großes Maximum von $h(t)$ nicht direkt um den Nullpunkt von t begünstigt das Entstehen einer großen Regelamplitude, ebenso ein Verlauf von $h(t)$, der für $t \geq T_c$ schnell abklingt.

Es ist jetzt noch die Frage zu klären, inwieweit sich höher-gradige Filtersysteme bezüglich der mit dem Grad steigenden Signallaufzeit negativ auswirken. Zu diesem Zweck wird die

Gruppenlaufzeit der drei behandelten optimierten Systeme berechnet und dargestellt. Im Falle des RC-Filterpaares ergibt sich aus Gl. (3.13) zunächst für die Phase

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= -\arctan \omega T \\ \varphi_2(\omega) &= \frac{\pi}{2} - \arctan \omega T \end{aligned} \right\} \quad (3.36a)$$

Die Gruppenlaufzeit $\tau_g(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}$ ist für beide Systeme gleich. Sie errechnet sich zu

$$\tau_g(\omega) = - \frac{T}{1+(\omega T)^2} = \frac{-T}{T_C} \cdot \frac{T_C}{1 + \left(\omega \frac{T}{T_C} \cdot T_C\right)^2}$$

bzw. nach Normierung auf die Chipbreite, Einführung der normierten Frequenz $\omega T_C = \Omega$ und mit $b = \frac{T_C}{T}$ gilt:

$$\frac{\tau_g(\Omega)}{T_C} = - \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{b}\right)^2} \quad (3.36b)$$

Das Maximum beim optimierten System liegt bei $\Omega = 0$ und beträgt ca. 55% der Chipzeit.

Für das RLC-Filtersystem folgt die Phase aus Gl. (3.21) unter Berücksichtigung der Gln. (3.22) und (3.23)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= - \arctan \frac{\frac{2\omega}{\omega_0} \cdot \cos \vartheta}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ \varphi_2(\omega) &= \pi/2 - \arctan \frac{\frac{2\omega}{\omega_0} \cdot \cos \vartheta}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.37a)$$

Hier bedeuten ω_0 den Polbetrag und ϑ der Polwinkel des konjugiert komplexen Polpaares. Durch Ableitung nach ω und Normierung mit $\omega_0 T_C = c$ auf die Chipzeit T_C folgt:

$$\frac{\tau_g(\Omega)}{T_C} = - \frac{2c \cos \vartheta (c^2 + \Omega^2)}{(c^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 c^2 \cos^2 \vartheta} \quad (3.37b)$$

Für $\Omega = 0$ liegt der Wert der Gruppenlaufzeit bei 51% der Chipzeit T_C , das absolute Maximum ergibt sich bei $\Omega_{\max} = c \cdot \sqrt{2 \sin \vartheta - 1}$ zu 55% der Zeit T_C .

Um den analytischen Ausdruck für τ_g beim optimierten Impulsformer zu ermitteln, dient Gl. (3.27a) als Basis. Die zum Aufbau von H_1 bzw. H_2 verwendeten Elemente R , L , C_I , C werden dann durch die normierten Katalogwerte [54] ausgedrückt. Die Phasen sind durch

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= -\arctan \frac{\omega [RC - \omega^2 LCC_I R]}{1 - \omega^2 (LC_I + LC)} \\ \varphi_2(\omega) &= \pi/2 + \varphi_1(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3.38a)$$

bestimmt. Mit den aus den Gln. (3.30 bis 3.33) zu erhaltenen Hilfsgrößen

$$RC = u = \frac{c_1 + l_2 + c_3}{2\omega_B} = v \cdot \frac{1}{\omega_B}$$

$$LCC_I R = v = \frac{c_1 l_2 + c_3}{2\omega_B^3} = \mu \cdot \frac{1}{\omega_B^3}$$

$$L[C_I + C] = w = \frac{l_2(c_1 + c_3)}{2\omega_B^2} = \kappa \cdot \frac{1}{\omega_B^2}$$

wird nach Ableitung

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= - \frac{u + \omega^2 [u \cdot w - 3v] + v \cdot w \cdot \omega^4}{(1 - w \cdot \omega^2)^2 + (u \cdot \omega - v \cdot \omega^3)^2} \\ &= - \frac{v \cdot \frac{1}{\omega_B} + \omega^2 \left[v \cdot \kappa \cdot \frac{1}{\omega_B^3} - 3\mu \cdot \frac{1}{\omega_B^3} \right] + \mu \cdot \kappa \cdot \frac{1}{\omega_B^5} \cdot \omega^4}{(1 - \kappa \cdot \frac{1}{2} \omega^2)^2 + (v \cdot \frac{1}{\omega_B} \cdot \omega - \mu \cdot \frac{1}{\omega_B^3} \cdot \omega^3)^2} \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung sind die Größen v , μ , κ dimensions-

los, sie enthalten nur die normierten Bauelemente des Kataloges [54]. Erweiterung von Zähler und Nenner mit ω_B^4 und T_C^4 ergibt mit den Normierungsgrößen $\Omega = \omega \cdot T_C$ und $\omega_B \cdot T_C = d$:

$$\frac{\tau_g(\Omega)}{T_C} = - \frac{vd^3 + \Omega^2 d(v\kappa - 3\mu) + \mu\kappa \cdot \frac{\Omega^4}{d}}{(d^2 - \kappa\Omega^2)^2 + (vd\Omega - \mu \cdot \frac{\Omega^3}{d})^2} \quad (3.38b)$$

Für $\Omega = 0$ folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{\tau_g(\Omega)}{T_C} = - \frac{v}{d} = - \frac{c_1 + c_2 + c_3}{2d}$$

Werden speziell die Werte für den optimierten Impulsformer 30.10.10 mit $d_{opt} \approx 16,58$ eingesetzt, so erhält man etwa 63,2% einer Chipzeit T_C . Bild 3.28 gibt eine Übersicht über die Gruppenlaufzeiten aller drei optimierten Systeme.

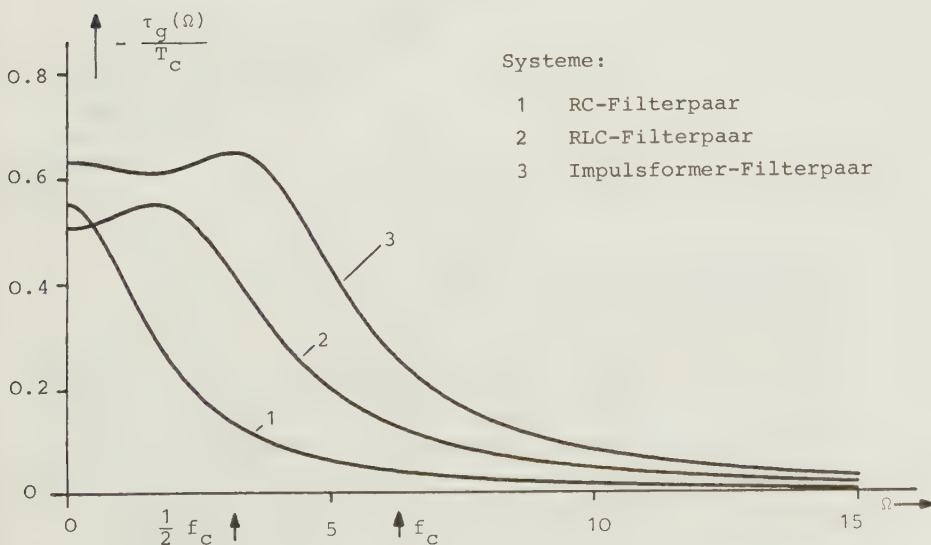


Bild 3.28 Normierte Gruppenlaufzeiten der optimierten Systeme 1., 2. und 3. Ordnung

Schließlich werden noch die Frequenzgänge $|H_{1,2}(\Omega)|$ der drei Systeme in den Bildern 3.29 und 3.30 dargestellt.

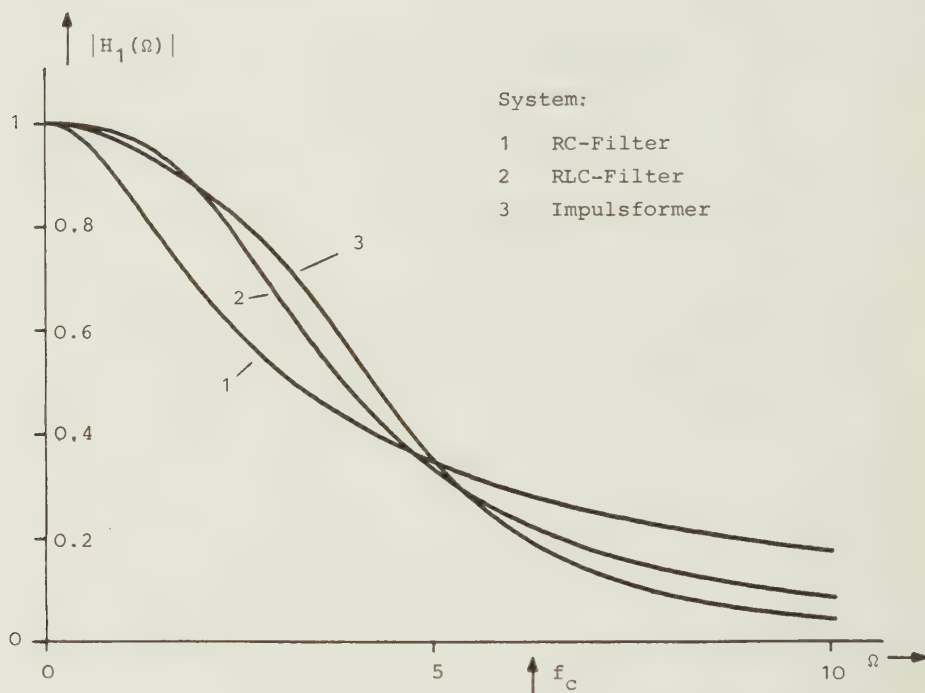


Bild 3.29 Betragsfrequenzgänge der Systeme $H_1(j\omega)$

Die Gruppenlaufzeit aller drei betrachteten Systeme liegt in der Größenordnung einer halben Chipbreite T_C . Sie darf für den geschlossenen Regelkreis keine Rolle spielen, denn die mit PN-Folgen betriebenen Strukturen in der Form des "1- T_C " bzw. "2- T_C "-Verzögerungs-DLL weisen ebenfalls in den beiden Korrelatorzweigen Verzögerungen um $\frac{T_C}{2}$ bzw. T_C auf, wie später noch durch eine Äquivalenzbetrachtung gezeigt wird.

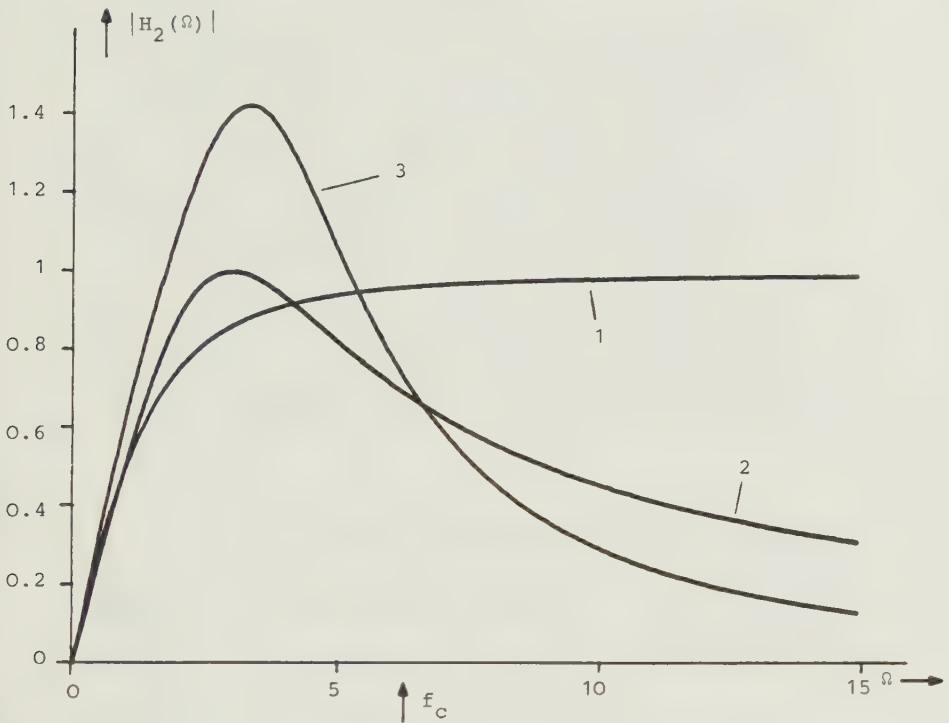


Bild 3.30 Frequenzgänge der Systeme $H_2(j\omega)$

Günstig für eine möglichst große Diskriminatorerkennlinie scheint ein bis etwa zur halben Taktfrequenz $\frac{f_c}{2}$ annähernd konstanter Gruppenlaufzeitverlauf zu sein, wie aus Bild 3.28 Kurve 3 zu ersehen ist. Die Frequenzgänge der Filter $H_1(j\omega)$ scheinen bezüglich der Maximierung von $A(\epsilon)$ eine untergeordnete Rolle zu spielen. Bemerkenswert ist nur, daß ein Durchlaßbereich bis in die Nähe der Taktfrequenz ausreichend ist (10 bis 14 dB-Abfall). Entscheidender ist die Höhe des Maximums im Frequenzgang bei den Filtern $H_2(j\omega)$ (Bandpaßcharakteristik) für ein großes $A(\epsilon)$. Mit diesen mehr qualitativen Aussagen bezüglich geeigneter Filterpaare könnte versucht werden, noch höhergradige Systeme zu suchen. Darauf wird hier verzichtet.

Generell sei noch einmal herausgestellt, daß sich die bisher betrachteten Filter 1., 2. und 3. Grades für den Korrelator allgemein für beliebige Signale $s(t)$ eignen. Sofern deren AKF $R_s(\tau)$ dreieckförmigen Verlauf hat, sind die bisher abgeleiteten Beziehungen für die Diskriminatorkennlinie sofort übernehmbar. Dies ist u.a. wesentlich für die später noch zu besprechenden mehrstufigen Folgen, welche Pseudo-Noise Eigenschaften besitzen oder verschiebungorthogonal sein können. In Anlehnung an die aus Bild 3.28 entnehmbare Forderung bezüglich τ_g wird zunächst ein auch für beliebige Signale $s(t)$ verwendbarer Korrelator besprochen, welcher statt analoger Filter möglichst ideale Verzögerungselemente enthält.

3.3.4 Korrelator mit Verzögerungsgliedern

Durch eine in [49] vorgestellte Schaltung zur orthogonalen Korrelation digitaler Signale angeregt, entstand folgende Struktur (s. Bild 3.31):

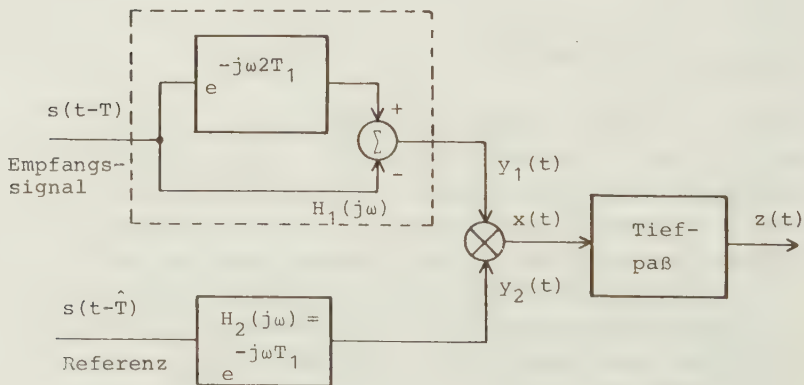


Bild 3.31 Korrelator mit Verzögerungsgliedern

Bei Frequenzen bis zu einigen hundert Kilohertz können die Verzögerungselemente als CCD-Schieberegister ausgeführt werden, wobei die Verzögerungszeit T_1 durch Taktfrequenzvariation sogar variabel gestaltet werden kann. Für Signalfrequenzen im MHz-Bereich bieten sich hingegen SAW-Schaltkreise (Surface Acoustic Wave-Device = Oberflächenwellen-Schaltkreise) an, die allerdings dann keine Variation der Verzögerungszeit T_1 zulassen.

Für die Analyse des Korrelators wird zunächst von einem festen T_1 ausgegangen. Die Systeme $H_{1,2}(j\omega)$ lassen sich dann in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= e^{-j\omega 2T_1} - 1 = e^{-j\omega T_1} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) \\ &= -j2 e^{-j\omega T_1} \cdot \sin\omega T_1 \\ H_1(j\omega) &= 2 \cdot e^{-j(\omega T_1 + \pi/2)} \cdot \sin\omega T_1 \end{aligned} \quad (3.39a)$$

$$H_2(j\omega) = e^{-j\omega T_1} \quad . \quad (3.39b)$$

Die beiden Phasengänge $\varphi_1(\omega)$ und $\varphi_2(\omega)$ unterscheiden sich immer um $\pm \pi/2$ (+ für $\sin\omega T_1 > 0$, - für $\sin\omega T_1 < 0$) und erfüllen damit die Voraussetzung für eine orthogonale Korrelationsfunktion $R_{y_1 y_2}(\epsilon) = \overline{x(t)} \approx z(t)$, siehe Bild 3.31.

Um in allgemeiner Form die Kennlinie $A(\epsilon)$ zu berechnen, wird zunächst wieder die Impulsantwort $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega) H_2^*(j\omega)\}$ bestimmt. Mit Gl. (3.39) gilt:

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) H_2^*(j\omega) &= e^{-j\omega T_1} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) \cdot e^{+j\omega T_1} \\ &= e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1} \quad . \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt zwei gegeneinander versetzte und inverse Deltaimpulse, d.h. die notwendig und hinreichende Bedingung für orthogonale Korrelation (ungerades $h(t)$) ist erfüllt.

$$h(t) = \delta_0(t-T_1) - \delta_0(t+T_1) \quad . \quad (3.40)$$

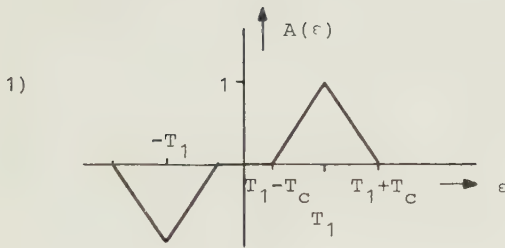
Werden Signalklassen $s(t)$ mit der AKF $R_S(\tau)$ verwendet, so ist wegen der Ausblendeigenschaft der Deltafunktion bei der erforderlichen Faltungsintegration $A(\epsilon)$ sofort angebar.

$$A(\epsilon) = R_S(\epsilon-T_1) - R_S(\epsilon+T_1) \quad . \quad (3.41)$$

Bei einer vorgegebenen AKF $R_S(\epsilon)$ lässt sich jetzt durch Variation der Verzögerungszeit T_1 im Verhältnis zur Chipzeit T_C die entstehende Regelkennlinie $A(\epsilon)$ bezüglich maximalen Wertes und größter Steigung optimieren. Dies geschieht hier am einfachsten graphisch, wobei von einer dreieckförmigen Signal-AKF ausgegangen wird (s. Bild 3.32).

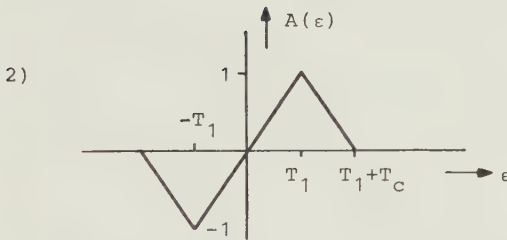
Offenbar ergeben sich nur brauchbare Kennlinien $A(\epsilon)$ für $\frac{T_C}{2} \leq T_1 \leq T_C$, wobei sowohl die größte Steigung im Nullpunkt ($\frac{2}{T_C}$) als auch der maximale Wert $\{A(\epsilon)\}_{\max} = 1$ für $T_1 = \frac{T_C}{2}$ erreicht wird. Verkleinert man T_1 unter $\frac{T_C}{2}$, so bleibt wohl die Steigung maximal groß, allerdings fällt der Maximalwert der Kennlinie, wie im Beispiel 4 zu sehen ist. Die optimale Verzögerungszeit ist also $T_1 = \frac{T_C}{2}$, äquivalent zu dem im 2. Kapitel vorgestellten " $1-T_C$ "-Verzögerungskorrektor für PN-Folgen. Für diesen Fall ist die Gruppenlaufzeit in beiden Systemen H_1 und H_2 ebenfalls konstant $\frac{T_C}{2}$.

Ausgehend von der in Bild 3.31 gezeigten Korrelatorstruktur wird noch eine Variation dahingehend untersucht, daß statt der Teilsysteme mit konstanter Verzögerung Filter eingesetzt werden, deren Laufzeit frequenzabhängig ist. Hier bieten sich Allpässe niedrigen Grades an.



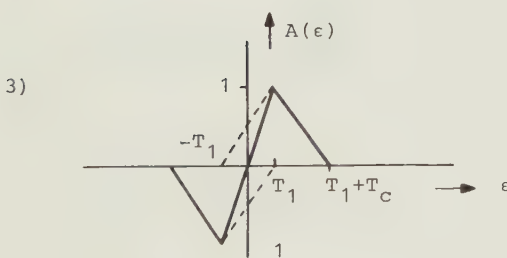
$$T_1 > T_C$$

→ Kennlinie mit
"toter Zone
 $2(T_1 - T_C)$ ",
unbrauchbar



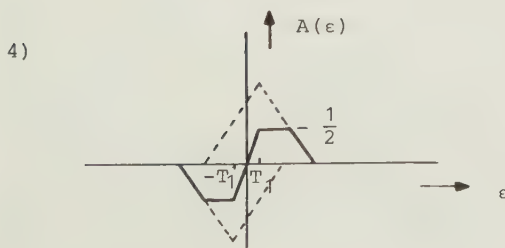
$$T_1 = T_C$$

→ Analoges Modell
des " $2-T_C$ "-Ver-
zögerungs-DLL



$$T_1 = \frac{T_C}{2}$$

→ Analoges Modell
des " $1-T_C$ "-Ver-
zögerungs-DLL



$$T_1 < \frac{T_C}{2}$$

$$(T_1 = \frac{T_C}{4})$$

Bild 3.32 Optimierung des Verzögerungsmodelles

3.3.5 Allpaßstruktur

Als Basissystem dient ein Allpaß 1. Grades mit der Übertragungsfunktion

$$H_A(s) = \frac{s - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad .$$

Darstellung für $s = j\omega$ nach Betrag und Phase liefert:

$$H_A(j\omega) = 1 \cdot e^{-j2\arctan\omega T} \quad .$$

Bezugnehmend auf Bild 3.31 wird für $H_1(j\omega)$ die folgende Zusammenschaltung (s. Bild 3.33) gewählt. Für H_2 dient direkt das Basissystem

$$H_2(j\omega) = H_A(j\omega) = e^{-j2\arctan\omega T} \quad (3.42)$$

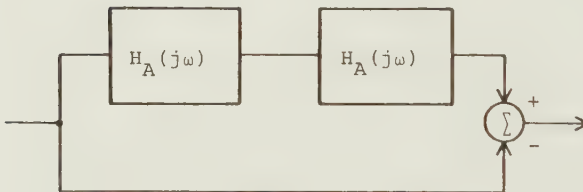


Bild 3.33 Bildung von $H_1(j\omega)$ mit Allpässen

Somit vereinfacht sich H_1 zu

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= e^{-j4\arctan\omega T} - 1 = e^{-j2\arctan\omega T} [e^{-j2\arctan\omega T} - e^{+j2\arctan\omega T}] \\ &= e^{-j2\arctan\omega T} [-j2\sin(2\arctan\omega T)] \quad . \end{aligned}$$

Für den Klammerausdruck ist bei Ersetzen der Sinus- und Kosinusfunktion durch den Tangens und nach Anwendung der Additionstheoreme folgende Äquivalenz gegeben:

$$\begin{aligned}
 2\sin(2\arctan\omega T) &= 4 \cdot \sin(\arctan\omega T) \cdot \cos(\arctan\omega T) \\
 &= 4 \cdot \frac{\tan(\arctan\omega T)}{1+(\tan\arctan\omega T)^2} = 4 \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} .
 \end{aligned}$$

Damit liegt H_1 in einer für weitere Rechnungen brauchbaren Form vor.

$$H_1(j\omega) = 4 \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-j(2\arctan\omega T + \pi/2)} \quad (3.43)$$

Vergleich der Gln. (3.42) und (3.43) zeigt, daß die Ausgangssignale beider Systeme bei gleichen Eingangssignalen wieder exakt für alle ω um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Die Gruppenlaufzeiten beider Systeme sind gleich und betragen das Doppelte gegenüber einem RC-Filterpaarsystem mit gleicher Zeitkonstante T .

Der maximale Wert für die Optimaldimensionierung des RC-Systems liegt bei $\omega=0$ mit

$$\frac{\tau_g(0)}{T_c} = -0,552$$

vor. Zur Ermittlung der Regelkennlinie wird zunächst wieder $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)\}$ mit den Gln. (3.42) und (3.43) gebildet.

$$\begin{aligned}
 H_1(j\omega)H_2^*(j\omega) &= 4 \cdot \frac{\omega T}{1+(\omega T)^2} \cdot e^{-j\pi/2} \\
 &= -j\omega \cdot 2 \cdot \frac{2/T}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2} .
 \end{aligned}$$

Der gebrochen rationale Term kann direkt nach Tabelle |76| zurücktransformiert werden. Nachfolgende Differentiation und Bewertung mit (-2) liefert $h(t)$.

$$h(t) = -2 \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{|t|}{4}} \right) = + \frac{2}{T} \operatorname{sgnt} \cdot e^{-\frac{|t|}{T}} . \quad (3.44)$$

Vergleich dieser Beziehung mit der Impulsantwort des RC-Filtersystems zeigt (s. Gl. 3.15):

1. Die Impulsantwort dieses Systems hat den gleichen Verlauf wie die vom RC-Filterpaar, nur besitzt sie den vierfachen Wert.
2. Die Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$ hat ebenfalls den gleichen Verlauf wie beim RC-System, aber mit 4-fachem Wert.
3. Optimierung der Allpaßzeitkonstanten T bezüglich der Chipzeit T_C kann aus Kap. 3.3.1 übernommen werden. Demnach ergibt sich bei Signalklassen $s(t)$ mit dreieckförmiger AKF nach Bild 3.7 eine maximal große Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$, die nur 0,15% kleiner als 1 ist für $\frac{T_C}{T} = 1,810703157$.
4. Die Steigung im Nullpunkt von $A(\epsilon)$ erreicht beim optimierten System den größten bis jetzt bekannten Wert mit $4 \cdot \frac{0,83646}{T_C}$ (s. Kap.3.3.1). Dieser Wert liegt mit 67,3% höher als beim "1- T_C "-Verzögerungs-DLL bzw. beim äquivalenten Modell für analoge Signale (s. letztes Kap.).

Entsprechende meßtechnische Untersuchung mit dem durch Bild 3.25 vorgestellten Meßaufbau brachte Übereinstimmung von Messung und Rechnung. Dabei wurden die Allpässe durch die nachfolgend dargestellten Äquivalenzstrukturen mit Dekaden und Trennverstärkern realisiert.

Bei vorliegender Allpaßfunktion

$$H_A(s) = \frac{s - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

sind die in den Ersatzsystemen vorkommenden Tiefpaßsysteme

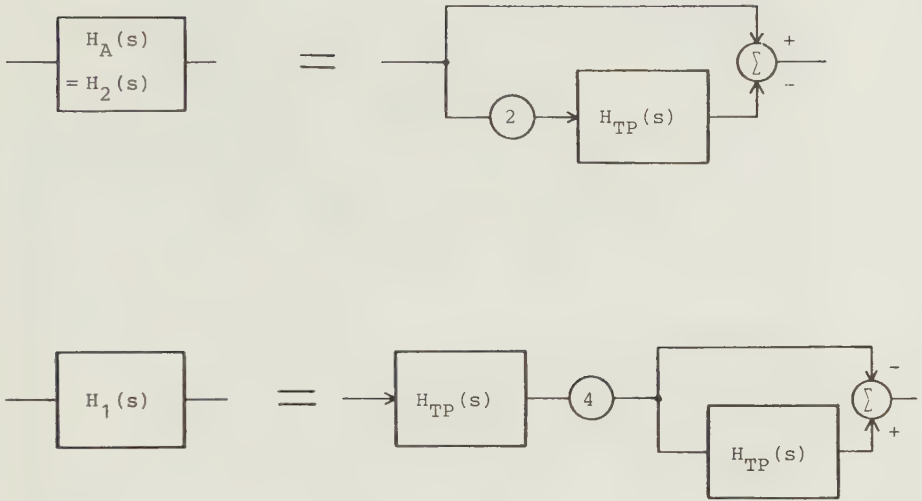


Bild 3.34 Äquivalenzstrukturen zu den Filtern H_1 und H_2

$H_{TP}(s)$ zu $H_{TP}(s) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$ dimensionieren. In der folgen-

den Darstellung sind die optimal erreichbaren Kennlinien $A(\epsilon)$ für Allpaß- und Verzögerungsmodell gezeigt.

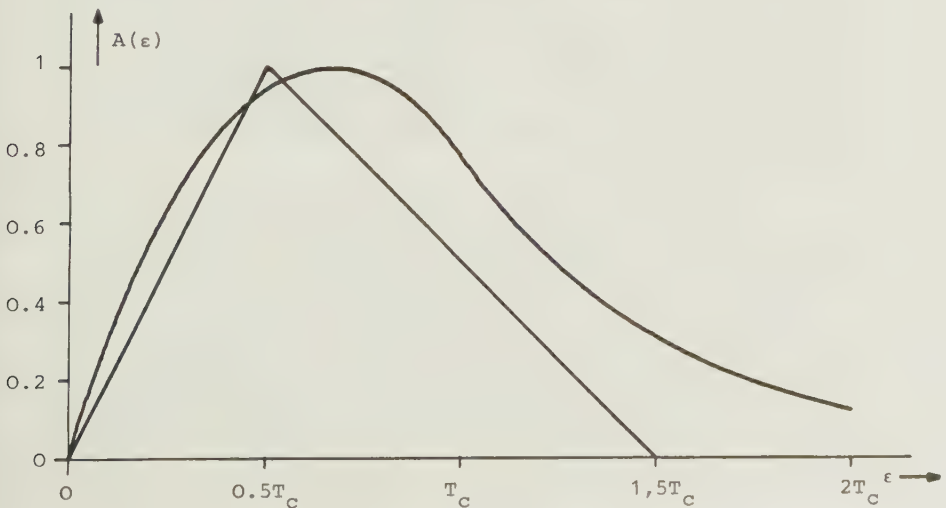


Bild 3.35 Optimale Kennlinien von Allpaß- und Verzögerungs-korrelator

Prinzipiell wird mit dem RC-Filterpaar-Korrelator und zusätzlichem Einfügen eines Verstärkers mit Faktor 4 in einem Korrelatorzweig eine gleichgroße Kennlinie $A(\varepsilon)$ wie beim Allpaßmodell erreicht. Allerdings ist noch offen, wie sich die bisher behandelten Modelle analoger Korrelatoren bezüglich der Transformation von weißem, gaußschem Rauschen vom Empfängereingang auf den Multipliziererausgang verhalten. Dieser Punkt wird als nächstes untersucht.

Als Ergänzung sei noch bemerkt, daß sich für H_1 und H_2 Allpässe mit breitbandiger Approximation einer 90° -Phasendifferenz nicht eignen, da deren Rücktransformierte $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)\}$ keine in t ungerade Funktion ergibt, wie leicht zu zeigen ist.

$$\left. \begin{aligned} H_1(j\omega) &= 1 \cdot e^{-j\varphi(\omega)} \\ H_2(j\omega) &= 1 \cdot e^{-j[\varphi(\omega) + \pi/2]} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Approximiert in} \\ \text{einem bestimm-} \\ \text{ten Frequenzband.} \end{array}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1 H_2^*\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\pi/2}\} = -j\delta_0(t) \text{ .}$$

Verwendung von höhergradigen Allpaßbasissystemen $H_A(j\omega)$ in der Struktur nach Bild 3.31 und 3.33 scheint auch keine Verbesserung bezüglich $A(\varepsilon)$ zu bringen. Dies gilt ganz sicher für Allpässe 2. Grades mit reellen Polen und Nullstellen, wie hier nicht aufgeführte Untersuchungen gezeigt haben.

3.4 Bestimmung des Rauscheinflusses am Korrelatorausgang

3.4.1 Allgemeine Formulierung des Problems

Sämtliche mit analogen realisierbaren Filtern ausgerüstete Korrelatoren mit Rauscheinfluß im Empfangszweig lassen sich durch die im Bild 3.36 gezeigte Struktur darstellen.

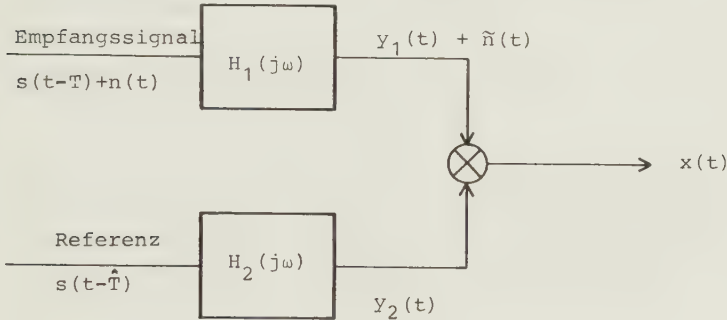


Bild 3.36 Analoger Korrelator mit verrauschtem Empfangssignal

Das Rauschsignal $n(t)$ im Empfangszweig sei durch weißes gauß'sches Rauschen mit dem Mittelwert 0 repräsentiert. Durch das Filter $H_1(j\omega)$, welches als linear und zeitinvariant angenommen wird, tritt eine Verformung der spektralen Leistungsdichte des Rauschanteils auf, d.h. $\tilde{n}(t)$ wird ein farbiges Geräusch.

Die Zielsetzung besteht darin, den gesamten Korrelator durch ein System mit der bereits ermittelten Diskriminator-kennlinie $A(\epsilon)$ zu ersetzen, wobei die Störeinflüsse höherfrequenter Art durch Ersatzquellen ins Signal $x(t)$ transformiert werden. Da mindestens $n(t)$ und unter Umständen auch $s(t)$ keine determinierten Signaleigenschaften besitzen, muß die AKF von $x(t)$, d.h. $R_x(\tau)$ bestimmt werden. Als erstes wird von den Signalen am Multiplizierer ausgegangen. Es ist

$$x(t) = [y_1(t) + \tilde{n}(t)] \cdot y_2(t)$$

$$x(t+\tau) = [y_1(t+\tau) + \tilde{n}(t+\tau)] \cdot y_2(t+\tau)$$

$$E\{x(t)x(t+\tau)\} = R_x(\tau) = E\{[y_1(t)y_2(t) + \tilde{n}(t)y_2(t)] \cdot [y_1(t+\tau)y_2(t+\tau) + \tilde{n}(t+\tau)y_2(t+\tau)]\}$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{\tilde{n}(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot \tilde{n}(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{\tilde{n}(t) \cdot y_2(t) \cdot \tilde{n}(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \end{aligned}$$

Da die Größen $y_1(t)$ und $\tilde{n}(t)$ bzw. $y_2(t)$ und $\tilde{n}(t)$ als statistisch voneinander unabhängig angesehen werden können, sind Aufteilungen der Teilprodukte bei der Erwartungswertbildung erlaubt.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{\tilde{n}(t)\} \cdot E\{y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{\tilde{n}(t+\tau)\} \cdot E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + E\{\tilde{n}(t)\tilde{n}(t+\tau)\} \cdot E\{y_2(t) \cdot y_2(t+\tau)\} \end{aligned}$$

Entsprechend der Voraussetzung war $\overline{\tilde{n}(t)} = 0$ und somit wird auch $\overline{\tilde{n}(t+\tau)} = 0$. Damit verschwinden zwei Terme und R_x reduziert sich zu

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\} \\ & + R_{\tilde{n}}(\tau) \cdot R_{y_2}(\tau) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Der 1. Term läßt sich nicht weiter vereinfachen, da zwischen den Signalen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ starke statistische Bindungen existieren. Er stellt den sogenannten Eigenrauschterm dar, der durch die Multiplikation der gefilterten Signale $s(t-T)$ und $s(t-\bar{T})$ entsteht.

Eine geschlossene Lösung ist bisher nicht bekannt.

Auf näherungsweise Berechnung bei bestimmten Signaltypen $s(t)$ wird später noch eingegangen. Der 2. Term hingegen stellt die AKF des transformierten Empfangsrauschens dar, er wird mit $R_n(\tau)$ definiert.

$$R_n(\tau) = \tilde{R}_n(\tau) \cdot R_{y_2}(\tau) \quad . \quad (3.46)$$

Mit den Impulsantworten der beiden Filter läßt sich eine weitere anschauliche Deutung für Gl. (3.46) unter Anwendung der Wiener-Lee-Beziehung finden.

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(\tau) &= R_n(\tau) * h_1(\tau) * h_1(-\tau) \\ &= R_n(\tau) * R_{h_1}(\tau) \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} R_{y_2}(\tau) &= R_s(\tau) * h_2(\tau) * h_2(-\tau) \\ &= R_s(\tau) * R_{h_2}(\tau) \end{aligned} \quad (3.47b)$$

$$R_n(\tau) = [R_n(\tau) * R_{h_1}(\tau)] \cdot [R_s(\tau) * R_{h_2}(\tau)]. \quad (3.48)$$

Dabei stellt der 2. Faktor die AKF am Ausgang des Filters $H_2(j\omega)$ bei Beaufschlagung mit der AKF der verwendeten Signaltypen $s(t)$ dar, während der 1. Faktor sich bei weißem Rauschen in der Form $R_{h_1}(\tau) * [N_0 \cdot \delta_0(\tau)] = N_0 \cdot R_{h_1}(\tau)$ schreiben läßt. Dabei wird das weiße Geräusch idealisierend mit der unendlich ausgedehnten zweiseitigen Leistungsdichte $N_0 = S_n(\omega)$ betrachtet. Unter diesen Annahmen werden als nächstes die bisher vorgestellten analogen Korrelatoren untersucht, und zwar wird nur die durch das Empfangsrauschen

$n(t)$ hervorgerufene AKF $R_n(\tau)$ bestimmt. Für den RLC- und den Impulsformer-Korrelator wird $S_n(\omega) = \mathcal{F}\{R_n(\tau)\}$ meßtechnisch ermittelt.

3.4.2 RC-CR-System

Wird zur Erzeugung einer orthogonalen Korrelationsfunktion ein Filterpaar 1. Ordnung verwendet (s. Kap. 3.3.1), so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $H_1(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}}$, Tiefpaß

$$H_2(j\omega) = j\omega \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}}, \quad \text{Hochpaß.}$$

Dabei wird das weiße Rauschen vom Empfangskanal tiefpaßgefiltert.

Fall 2: Tiefpaß und Hochpaß vertauschen, damit kehrt sich bei der Diskriminatorkennlinie $A(\varepsilon)$ das Vorzeichen um, das Empfangsrauschen wird jetzt hochpaßgefiltert.

Welche Anordnung günstiger bezüglich $R_n(\tau)$ ist, muß durch Rechnung untersucht werden.

Fall 1: $H_1(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}}; |H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2}$

$$R_{h_1}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|H_1(\omega)|^2\} = \frac{1}{2T} \cdot e^{-|\tau|/T} \quad \text{s.Tab. |76|.}$$

Faltung dieser Beziehung mit der AKF von weißem Rauschen $R_n(\tau) = N_0 \cdot \delta_0(\tau)$ führt mit Gl. (3.47a) zu

$$R_n(\tau) = R_{Y_1}(\tau) = N_0 \frac{1}{2T} \cdot e^{-|\tau|/T}. \quad (3.49)$$

Das System $H_2(j\omega)$ wird mit der Referenzfolge $s(t)$ beaufschlagt, wobei vorausgesetzt wird, daß die zugehörige AKF $R_s(\tau)$ dreieckförmigen Verlauf wie in Bild 3.7 dargestellt,

besitze (echte Zufallsfolge, orthogonalisierte PN-Folge oder andere orthogonale Folgen $s(t)$).

$$\text{Mit } |H_2(\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2} = 1 - \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2} = 1 - |H_1(\omega)|^2$$

läßt sich die Rücktransformierte sofort angeben.

$$R_{h_2}(\tau) = \delta_0(\tau) - \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}$$

Zur Bestimmung der AKF $R_{Y_2}(\tau)$ muß diese Gleichung mit $R_s(\tau)$ gefaltet werden. Auswertung s. Anhang A8 ergibt:

$$R_{Y_2}(\tau) = \frac{T}{T_c} \cdot \begin{cases} (1 - \cosh \frac{T_c}{T}) \cdot e^{-|\tau|/T} & \text{für } |\tau| \geq T_c \\ e^{-|\tau|/T} - e^{-T_c/T} \cdot \cosh \frac{\tau}{T} & \text{für } |\tau| \leq T_c \end{cases} \quad (3.50)$$

Beide Funktionsteile fügen sich bei $|\tau| = T_c$ stetig aneinander, die Ableitungen sind an diesen Stellen unstetig. Die Produktbildung der Gln. (3.49) und (3.50) ergibt die AKF des transformierten Rauscheinflusses am Multipliziererausgang zu:

$$R_{n'}(\tau) = \frac{N_0}{2T_c} \cdot \begin{cases} e^{-2|\tau|/T} \cdot (1 - \cosh \frac{T_c}{T}) & \text{für } |\tau| \geq T_c \\ e^{-2|\tau|/T} \cdot (1 - \frac{e^{-T_c/T}}{2}) - \frac{e^{-T_c/T}}{2} & \text{für } |\tau| \leq T_c \end{cases} \quad (3.51)$$

Fouriertransformation dieser Beziehung ergibt das transformierte Leistungsdichtespektrum $S_{n'}(\omega)$.

$$S_{n'}(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} R_{n'}(\tau) \cdot \cos \omega \tau d\tau$$

Nach Beachtung der Gültigkeitsbereiche bei den Teilfunktionen für die Integralgrenzen erhält man mit der Normierung $\Omega = \omega \cdot T_c$ und $b = \frac{T_c}{T}$ mit einigen Zwischenrechnungen:

$$S_{n,}(\Omega) = \frac{N_0}{2} \cdot \left\{ \frac{4b}{\Omega^2 + 4b^2} (1 - \cosh b) - e^{-b} \cdot \frac{\sin \Omega}{\Omega} \right. \\ \left. + e^b \cdot \left[\frac{2b}{\Omega^2 + 4b^2} - \frac{e^{-2b}}{\sqrt{\Omega^2 + 4b^2}} \cdot \cos(\Omega + \arctan \frac{\Omega}{2b}) \right] \right\} \quad (3.52)$$

Die Bilder 3.37a und b zeigen die AKF $R_{n,}(\tau)$ und das normierte Leistungsdichtespektrum $S_{n,}(\Omega)$ für $b = \frac{T_c}{T}$ als Parameter. Wie es zu erwarten ist, nähert sich die AKF $R_{n,}(\tau)$ des transformierten Rauschens mit wachsender Grenzfrequenz ω_g des RC-Filterpaares, d.h. mit steigendem $\frac{T_c}{T} = T_c \cdot \omega_g$ immer mehr dem $\delta_0(\tau)$ -Verlauf, also der AKF $R_n(\tau)$ des Eingangsrauschens $n(t)$. Diese Tendenz ist auch durch den Verlauf der Leistungsdichte (s. Bild 3.37b) zu erkennen.

Für das optimierte Filterpaar 1. Ordnung ergibt sich aus Gl. (3.52) bei $\omega = 0$ der Wert:

$$S_{n,}(0) = N_0 \cdot 0,149207266 \quad . \quad (3.53)$$

Nachfolgend wird der 2. Fall behandelt, d.h. Hochpaß und Tiefpaß werden vertauscht.

Fall 2: $H_1(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{T}}$.

Die Berechnung der AKF $R_{n,}(\tau)$ und des dazugehörigen Leistungsdichtespektrums ist im Anhang A8 ausgeführt. Für die auf die Rauschleistungsdichte N_0 normierte AKF

$$\frac{R_{n,}(\tau)}{N_0}$$

erhält man:

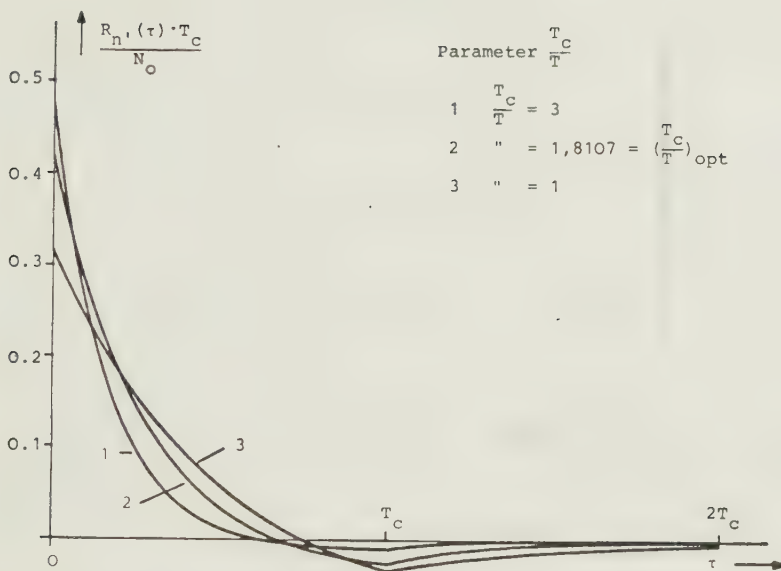


Bild 3.37a AKF $R_n(\tau)$ des transformierten Rauschens beim RC-Korrelator

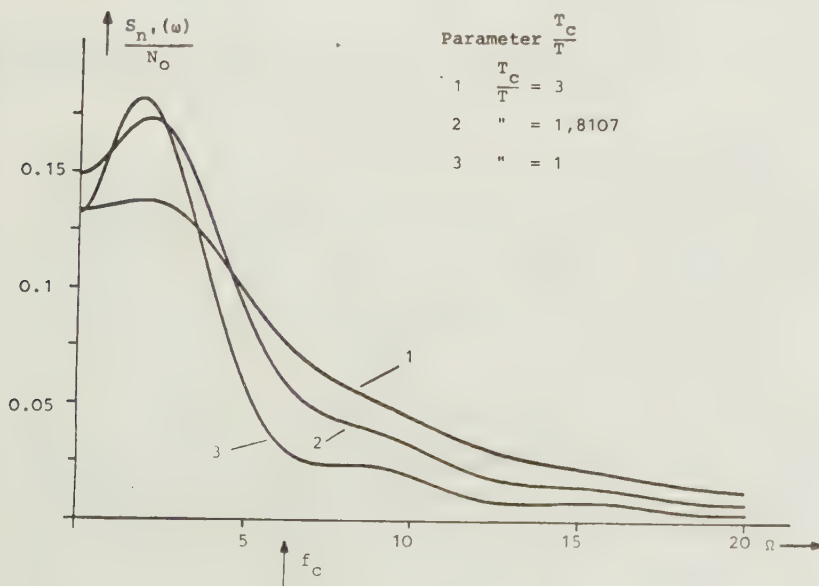


Bild 3.37b Normierte Leistungsdichte des Rauschens am Korrelatorausgang

$$\frac{R_n(\tau)}{N_0} = \begin{cases} \left[1 + \frac{T}{T_c} (e^{-T_c/T} - 1) \right] \cdot \delta_0(\tau) - \\ - \frac{1}{2T_c} \cdot \left[\frac{-\tau \operatorname{sgn} \tau + T_c}{T} \cdot e^{-|\tau|/T} - e^{2|\tau|/T} + \frac{e^{-T_c/T}}{2} (e^{2|\tau|/T} + 1) \right] & \text{für } |\tau| \leq T_c \\ \frac{1}{2T_c} \cdot \left[e^{-2|\tau|/T} (1 - \cosh \frac{T_c}{T}) \right] & \text{für } |\tau| \geq T_c \end{cases} \quad (3.54)$$

Das Leistungsdichtespektrum läßt sich mit den normierten Größen $\omega T_c = \Omega$ und $\frac{T_c}{T} = b$ in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{S_n(\Omega)}{N_0} &= \left[1 + \frac{1}{b} (e^{-b} - 1) \right] - \frac{b^2}{b^2 + \Omega^2} + \frac{2b}{(2b)^2 + \Omega^2} \\ &+ \frac{b}{(b^2 + \Omega^2)^2} \left[(b^2 - \Omega^2) (1 - e^{-b} \cos \Omega) + e^{-b} \cdot 2b \cdot \Omega \sin \Omega \right] \\ &- \frac{e^{-b}}{2} \left[\frac{2b}{(2b)^2 + \Omega^2} + \frac{1}{\sqrt{(2b)^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega + \arctan \frac{\Omega}{2b}) + \frac{\sin \Omega}{\Omega} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Es ist im Bild 3.38 dargestellt. Für $\Omega = 0$ ergibt sich für das optimale Filterpaar:

$$\frac{S_n(0)}{N_0} = \frac{1}{2 \cdot b_{\text{opt}}} \left[1 - e^{-b_{\text{opt}}(1+b_{\text{opt}})} \right] = 0,149207266 \quad (3.56)$$

d.h. es liegt der gleiche Wert wie beim Fall 1 vor.

Vergleich der beiden Leistungsdichten um $\Omega \approx 0$ läßt vermuten, daß bei einem genügend schmalbandigem Schleifenfilter $F(j\omega)$, welches dem Multiplizierer zur Bildung eines geschlossenen DLL nachgeschaltet wird, beide Variationen des RC-Korrelators

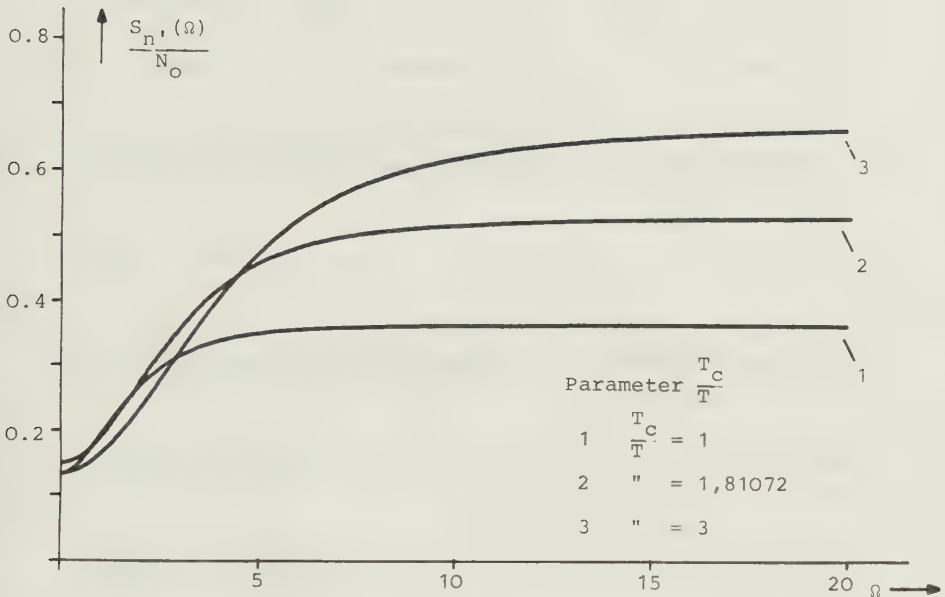


Bild 3.38 Normierte Leistungsdichte des transformierten Rauschens

annähernd gleiche Ergebnisse bezüglich des Rauscheinflusses auf die geschlossene Schleife bringen werden. Eine genauere Untersuchung folgt später bei der Behandlung des geschlossenen Regelkreises. Es kann hier allerdings schon festgestellt werden, daß bei breitbandigen Schleifenfiltern $F(j\omega)$ das Modell 1, bei dem das Empfangsrauschen über den Tiefpaß zum Multiplizierer gelangt, günstiger sein wird. Bei Einfügen eines Verstärkers mit dem Faktor 4 ergibt sich die gleichgroße Regelkennlinie wie beim Allpaßmodell. Es liegt daher nahe, als nächstes den transformierten Rauscheinfluß beim Allpaß-Korrelator zu bestimmen.

3.4.3 Allpaß-Korrelator

Es werden wie schon in Kap. 3.3.5 vorgestellt, Allpässe

1. Grades mit $H_A(j\omega) = \frac{j\omega - \frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{T}}$ verwendet. Auch hierbei

gibt es die beiden Möglichkeiten, das Rauschen auf H_1 als Parallelstruktur oder direkt auf den Allpaß $H_A(j\omega)$ einwirken zu lassen.

$$\text{Fall 1: } H_1(j\omega) = H_A(j\omega) \cdot H_A(j\omega) - 1 = \frac{\frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{T}} \cdot \frac{\frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{T}} (-j4\omega T)$$

Diese Darstellung entspricht der Reihenschaltung zweier Tiefpässe 1. Ordnung mit nachgeschaltetem idealem Differenzierer und Bewertung mit $(-4T)$.

Die für die Rauschtransformation erforderliche Betragsquadratdarstellung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) \cdot H_1^*(j\omega) &= |H_1(j\omega)|^2 = 4 \cdot (j\omega)(-j\omega) \frac{\frac{2}{T}}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2} \cdot \frac{\frac{2}{T}}{\omega^2 + (\frac{1}{T})^2} \\ &= \frac{16}{T^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 \cdot \frac{1}{T^2} + \frac{1}{T^4}} \end{aligned}$$

Die Rücktransformierte dieser Funktion ist abgesehen von einem noch auszuführenden Grenzübergang in [52] tabelliert. Mit

$$\left. \frac{\omega^2}{[\omega^2 + (\frac{1}{T})^2]^2} \right|_{2\delta \rightarrow 0} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} T \cdot e^{-t/T} \cos \delta \cdot \frac{\sin(\delta - \frac{t}{T}) \sin \delta}{\sin 2\delta}$$

$$\text{für } t > 0 \text{ gilt: } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin(\delta - \frac{t}{T}) \sin \delta}{\sin 2\delta} = \frac{1 - \frac{t}{T}}{2}$$

Somit wird $h_1(\tau) = R_{h_1}(\tau)$ erhalten zu

$$R_{h_1}(\tau) = \frac{4}{T} \cdot e^{-|\tau|/T} (1 - |\tau|/T) \quad (3.57)$$

Am Ausgang des Systems $H_1(j\omega)$ ist die AKF $R_{Y_1}(\tau)$ bei Erregung mit weißem Rauschen durch $R_{h_1}(\tau) * N_{O_1}^{\delta_1}(\tau)$ angebar.

$$R_{Y_1}(\tau) = \frac{4 \cdot N_O}{T} \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cdot e^{-|\tau|/T}.$$

Im Zweig mit $H_2(j\omega) = H_A(j\omega)$ wird durch den Allpaß die AKF des Referenzsignals nicht geändert [63]. Sie beträgt

$$R_{Y_2}(\tau) = R_S(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{T_C}\right) \quad \text{für } |\tau| \leq T_C$$

und sonst 0.

Die Produktbildung ergibt die AKF $R_n(\tau)$ des transformierten Rauschens

$$R_n(\tau) = \begin{cases} \frac{4 \cdot N_O}{T} \cdot e^{-|\tau|/T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_C}\right) & \text{für } |\tau| \leq T_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.58)$$

welche in Bild 3.39 für verschiedene Verhältnisse $\frac{T_C}{T}$ zu sehen ist.

Das zugehörige Leistungsdichtespektrum wird nach den Berechnungen im Anhang A9 mit den normierten Größen $\omega T_C = \Omega$ und $\frac{T_C}{T} = b$ in der Form der Gl. (3.59) erhalten, und die zugehörigen Funktionsverläufe für b als Parameter zeigt Bild 3.40.

$$\begin{aligned} \frac{S_n(\Omega)}{N_O} &= \frac{8 \cdot b \cdot e^{-b}}{(b^2 + \Omega^2)^2} \cdot \left[e^b \cdot (2b\Omega^2 - b^2 + \Omega^2) + (b^2 + b\Omega^2 - b^3 - \Omega^2) \cos \Omega \right. \\ &\quad \left. + (2b^2\Omega - 2b\Omega) \sin \Omega + \frac{(6b^3\Omega - 2b\Omega^3) \sin \Omega + (6b^2\Omega^2 - 2b^4) (\cos \Omega - e^{-b})}{b^2 + \Omega^2} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

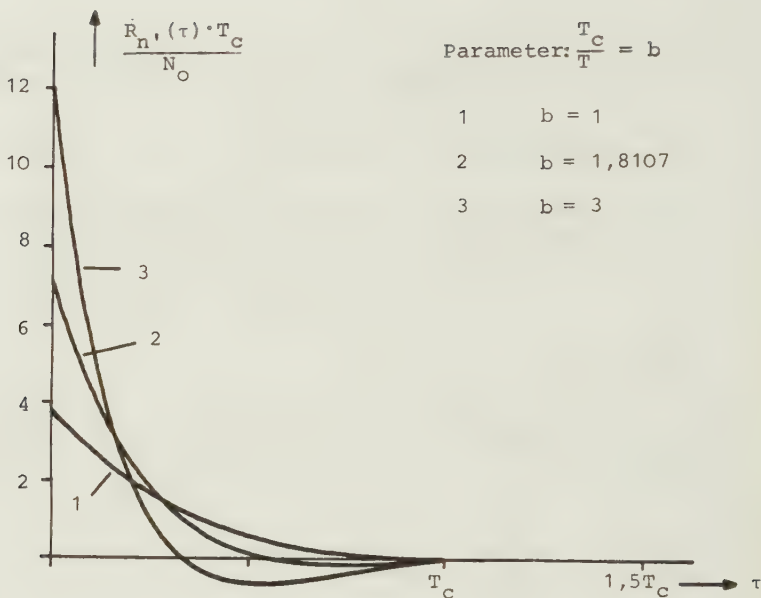


Bild 3.39 AKF $R_n(\tau)$ des transformierten Rauschens beim Allpaß-Korrelator

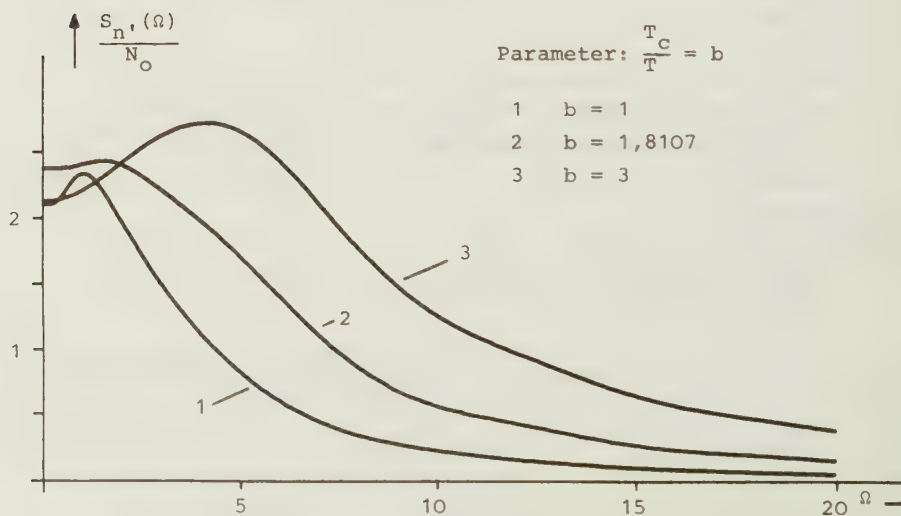


Bild 3.40 Normierte Leistungsdichte des transformierten Rauschens beim Allpaßkorrelator

Für das bezüglich maximaler Kennlinie $A(\epsilon)$ optimierte System mit $b = b_{\text{opt}} \approx 1,8107$ wird aus Gl. (3.59) der Wert für $\Omega = 0$ zu

$$\begin{aligned} \frac{S_n(0)}{N_0} &= \frac{8}{b_{\text{opt}}} \left[1 - e^{-b_{\text{opt}}} - b_{\text{opt}} e^{-b_{\text{opt}}} \right] \\ &= 2,387316255 \end{aligned} \quad (3.60)$$

erhalten. Vergleich mit Gl. (3.53), welche den entsprechenden Wert für den optimierten RC-Korrelator repräsentiert, zeigt, daß das Allpaßmodell den 16-fachen Wert für $S_n(0)$ aufweist. Würde man beim RC-Korrelator in einem Filterzweig eine konstante Verstärkung von 4 vorsehen, so ergeben sich für beide Korrelatoren (RC- und Allpaßmodell) die gleichen Werte für $S_n(0)$, $A(\epsilon)$ und $\left. \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0}$. Durch Vergleich des spektralen Verlaufs beider Modelle (s. Bilder 3.37b und 3.40) für die Fälle 1, d.h. Rauscheinfluß auf Tiefpaß bzw. Bandpaß, ist zu ersehen, daß für ein breitbandigeres nachzuschaltendes Schleifenfilter $F(j\omega)$ das Allpaßmodell günstiger ist (Flacherer Verlauf von $S_n(\Omega)$ der Kurven 2). Allerdings könnte für extrem breitbandige Schleifenfilter $F(j\omega)$ ($5 \leq \Omega_g \leq 10$) das RC-Modell wieder vorteilhafter sein.

Zu bemerken ist noch, daß durch die Allpässe enthaltenen Filterzweige der maximale Wert des jetzt farbigen Rauschens bei $\Omega \approx 0$ auf mehr als das Doppelte des Eingangsrauschens angestiegen ist.

Vertauschen der Filter $H_1(j\omega)$ und $H_2(j\omega)$ führt zur nächsten Betrachtung:

Fall 2: $H_1(j\omega) = H_A(j\omega) = \frac{j\omega - \frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{T}} \quad .$

Mit $\mathcal{F}^{-1}\{H_A(j\omega) \cdot H_A^*(j\omega)\} = \delta_0(t)$ ergibt sich bei Erregung mit weißem Rauschen $n(t)$ die AKF $R_{Y_1}(\tau)$ zu:

$$R_{Y_1}(\tau) = N_O \cdot \delta_O(\tau) * \delta_O(\tau) = N_O \cdot \delta_O(\tau)$$

Im zweiten Filterzweig, welcher mit der Referenzfolge $s(t)$ (z.B. eine echte -1, 1 Zufallsfolge mit dreieckförmiger AKF $R_S(\tau)$) erregt wird, gilt:

$$R_{Y_2}(\tau) = R_S(\tau) * R_{h_2}(\tau)$$

mit $R_{h_2}(\tau)$ aus Gl. (3.57) für $h_2 \rightarrow h_1$ (Filtertausch).

Für das transformierte Rauschen $R_{N_1}(\tau)$ ist wegen der Ausblendeigenschaft des δ_O -Impulses bei $R_{Y_1}(\tau)$ nur $R_{Y_2}(0)$ relevant. Damit braucht nicht der gesamte Verlauf von R_{Y_2} bestimmt zu werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} R_{N_1}(\tau) &= N_O \cdot \delta_O(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_S(t) \cdot R_{h_2}(-t) dt \\ &= N_O \cdot \delta_O(\tau) \cdot 2 \int_0^{\infty} R_S(t) \cdot R_{h_2}(-t) dt. \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals ist aber bereits aus Behandlung des Falles 1 bekannt. Wegen des Verschwindens von $R_S(t)$ für $t > T_C$ gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left[2 \int_0^{T_C} R_S(t) \cdot R_{h_2}(t) \cos \omega t dt \right] = \frac{S_{N_1}(0)}{N_O} = 2,387316255$$

(Vgl. Gl. 3.60).

Das zugehörige Leistungsdichtespektrum (hier weiß) wird durch Fouriertransformation von $R_{N_1}(\tau)$ erhalten zu

$$S_{N_1}(\omega) = 2,387316255 \cdot N_O \quad \forall \omega.$$

Vergleich mit Bild 3.40 zeigt, daß wegen des Abfalles von $S_{N_1}(\Omega)$ mit steigendem Ω der Fall 1, bei dem das Empfangsrauschen auf den Bandpaß $H_1(j\omega) = H_A^2(j\omega) - 1$ gelangt, generell die günstigere Konfiguration darstellt.

Gewünscht würde für beide Fälle des Allpaßmodelles ein möglichst kleiner Wert

$$\frac{S_{n'}(0)}{N_0} = f(b) = \frac{8}{b} \cdot \left[1 - e^{-b(1+b)} \right]$$

bei nicht allzu großer Entfernung von b_{opt} für eine maximal große Diskriminator Kennlinie $A(\epsilon)$. Die Darstellung $f(b)$ (s. Bild 3.41) in Anlehnung an Gl. (3.60) zeigt aber, daß im Bereich von b_{opt} auch etwa das Maximum von $f(b)$ liegt.

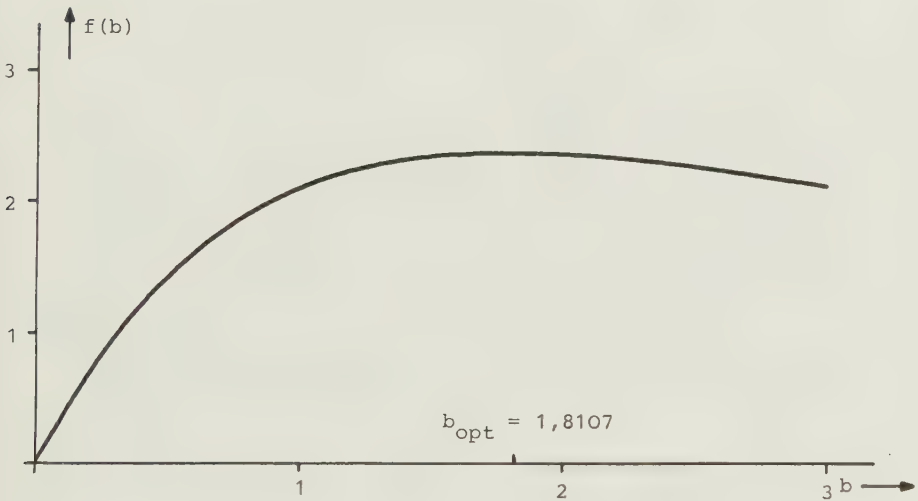


Bild 3.41 Spektrale Leistungsdichte bei $\Omega = 0$ in Abhängigkeit von $b = \frac{T_C}{T}$ beim Allpaß-Korrelator

Analytische Auswertung der Maximumbestimmung führt auf die transzendente Gleichung

$$e^{b_M} = b_M^2 + b_M + 1$$

mit der Lösung: $b_M = 1,793282133$.

Dieser Wert ist nur 1,74% kleiner als der für eine maximal große Regelkennlinie $A(\epsilon)$ erhaltene Wert b_{opt} nach Gl. (3.20b).

Die optimale Kennlinie $A(\epsilon)$ ist mit dem maximalem Rauschen verknüpft. Verlassen der Optimalbedingung, um zu kleineren Rauschwerten zu kommen, führt aber zu größeren Verlusten in der Steigung der Regelkennlinie, die für die Varianz des Zeitverzögerungsfehlers maßgebend ist, s. Kap. 6.

Beispielsweise ergibt sich für $b = 0,5$ eine Verbesserung von $\frac{S_n(0)}{N_0}$ gegenüber dem Wert beim optimalen Korrelator um 2,185 dB; die Steigung um $\epsilon = 0$ nach Gl. 3.20c fällt aber dabei um 3,27 dB.

3.4.4 Verzögerungsstruktur

Bevor die Analyse für das transformierte Rauschen bei der nach Bild 3.31 aufgebauten Verzögerungsstruktur vorgenommen wird, soll gezeigt werden, daß der angesprochene Verzögerungskorrelator bezüglich Kennlinie $A(\epsilon)$ und noch vorzunehmender Rauschtransformation gleiches Verhalten wie der durch Bild 2.12 dargestellte "1 bzw. 2- T_c "-Verzögerungskorrelator besitzt. Die Bilder 3.42a und b zeigen die angesprochenen Strukturen mit der weiter verwendeten Nomenklatur.

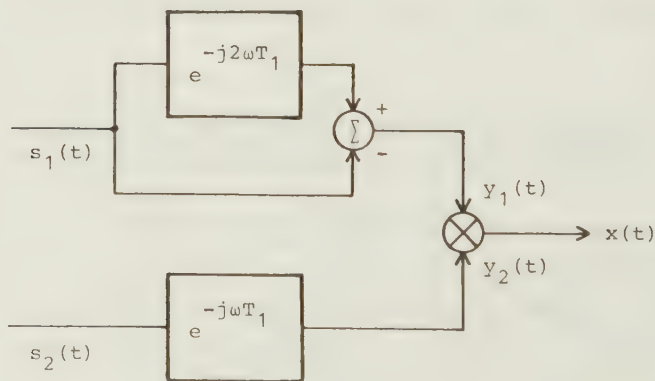


Bild 3.42a Verzögerungskorrelator, optimal für $T_1 = \frac{T_c}{2}$

Das nachfolgende Bild enthält ein nicht realisierbares Verzögerungselement mit $e^{+j\omega T_1}$. Die dadurch bewirkte Signalvoreilung ist bei der praktisch realisierbaren Schaltung nach Bild 2.12 durch entsprechende Schieberegisteranzapfung allerdings gegeben.

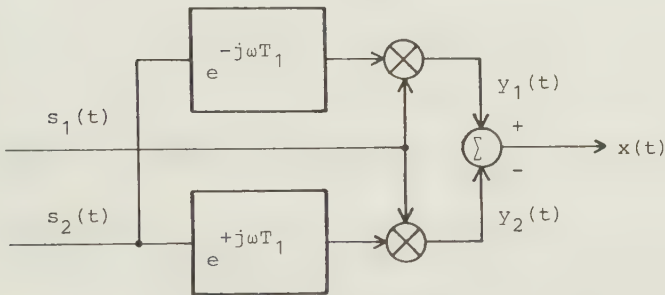


Bild 3.42b "1, bzw. $2-T_C$ "-Verzögerungskorrelator für $T_1 = \frac{T_C}{2}$ bzw. T_C

Für zunächst beliebige Signale $s_{1,2}(t)$ ergibt die Analyse der Schaltung nach Bild 3.42a:

$$y_1(t) = s_1(t-2T_1) - s_1(t)$$

$$y_2(t) = s_2(t-T_1)$$

$$x(t) = y_1(t) \cdot y_2(t) = s_2(t-T_1) [s_1(t-2T_1) - s_1(t)].$$

Mit der Substitution $t-T_1 = \tilde{t}$ läßt sich das Ausgangssignal $x(t)$ durch

$$x(\tilde{t}+T_1) = s_2(\tilde{t}) [s_1(\tilde{t}-T_1) - s_1(\tilde{t}+T_1)] \quad (3.61a)$$

angeben. Der Mittelwert stellt als Gleichspannungskomponente die Regelspannung dar.

$$\begin{aligned}\overline{x(t+T_1)} &= E\{s_2(t) \cdot s_1(t-T_1)\} - E\{s_2(t) \cdot s_1(t+T_1)\} \\ &= R_{s_2 s_1}(-T_1) - R_{s_2 s_1}(T_1)\end{aligned}\quad (3.61b)$$

Bei zeitlicher Verzögerung der beiden Signale $s_{1,2}$ um ϵ gegeneinander wird genau die durch Bild 2.13 beim "2T₁"-Verzögerungsmodell gezeigte Darstellung erhalten. Eine entsprechende Analyse der Schaltung von Bild 3.42b liefert:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= s_1(t) \cdot s_2(t-T_1) \\ y_2(t) &= s_1(t) \cdot s_2(t+T_1) \\ x(t) &= y_1(t) - y_2(t) = s_1(t) [s_2(t-T_1) - s_2(t+T_1)]\end{aligned}\quad (3.62a)$$

Bis auf eine Vertauschung von s_1 und s_2 und eine konstante Verzögerung von T_1 bei $x(t)$ im zweiten Modell verhalten sich die beiden Strukturen gleich. $\overline{x(t)}$ wird zu

$$\overline{x(t)} = R_{s_1 s_2}(-T_1) - R_{s_1 s_2}(+T_1)\quad (3.62b)$$

erhalten, bzw. für eine Verzögerungsdifferenz um ϵ zwischen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ für $\hat{s}_1 = \hat{s}_2$:

$$\overline{x(t)} = R_s(\epsilon - T_1) - R_s(\epsilon + T_1) \quad .$$

Zur Berechnung der AKF $R_x(\tau)$ können bis auf die Vertauschung der Signalzweige und eine konstante Verzögerung beide Modelle als äquivalent angesehen werden. Die weiteren Betrachtungen werden demzufolge am Modell nach Bild 3.42a vorgenommen. Dabei wird zur Bestimmung des transformierten Rauschens jeweils ein Signal als weißes Rauschen, welches vom Referenzsignal statistisch unabhängig und damit unkorreliert ist, angesetzt. Es sind wieder wie beim Allpaß- und RC-Korrektor zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $s_1(t) = n(t)$ weißes Rauschen
 $s_2(t)$: Referenzfolge mit Amplitude 1 und dreieckförmiger AKF

Dann ergibt sich:

$$y_1(t) = n(t-2T_1) - n(t)$$

$$y_1(t+\tau) = n(t+\tau-2T_1) - n(t+\tau)$$

$$\begin{aligned} R_{y_1}(\tau) &= E\{y_1(t) \cdot y_1(t+\tau)\} = E\{n(t-2T_1) \cdot n(t+\tau-2T_1)\} \\ &\quad - E\{n(t-2T_1) \cdot n(t+\tau)\} - E\{n(t) \cdot n(t+\tau-2T_1)\} \\ &\quad + E\{n(t) \cdot n(t+\tau)\} \end{aligned}$$

Durch Substitution der Argumente ist leicht zu zeigen, daß gilt:

$$R_{y_1}(\tau) = 2 \cdot R_n(\tau) - R_n(\tau+2T_1) - R_n(\tau-2T_1) \quad (3.63a)$$

Mit $R_n(\tau) = N_0 \cdot \delta_0(\tau)$ des weißen Rauschens ist die für $y_1(t)$ geltende AKF in der Form

$$R_{y_1}(\tau) = N_0 \{2 \cdot \delta_0(\tau) - \delta_0(\tau+2T_1) - \delta_0(\tau-2T_1)\} \quad (3.63b)$$

angebar. Für den unteren mit $s_2(t)$ erregten Signalzweig wird die AKF

$$R_{y_2}(\tau) = R_{s_2}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_C} \quad \text{für } |\tau| \leq T_C, \quad 0 \text{ sonst}$$

gemäß den getroffenen Voraussetzungen. Für den Fall des optimalen Korrelators ist $T_1 = \frac{T_C}{2}$ zu wählen. Damit wird die AKF $R_n(\tau)$ des transformierten Rauschens als ein mit $N_0 \cdot 2$ $R_{y_2}(0)$ bewerteter Deltaimpuls erhalten. Die spektrale Leistungsdichte ist ebenfalls sofort angebar.

$$R_n(\tau) = 2 \cdot N_0 \cdot \delta_0(\tau) \quad (3.64a)$$

$$\frac{S_n(\omega)}{N_0} = 2 \quad \forall \omega \quad (3.64b)$$

Das transformierte Rauschen bleibt weiß im Gegensatz zu den

RC- und Allpaßstrukturen. Der Wert des Leistungsdichtespektrums mit $2 \cdot N_0$ liegt bei $\omega \approx 0$ somit um 19,4% unter dem des Allpaßkorrelators, vgl. Gl. (3.60). Allerdings hat das Allpaßsystem eine steilere Kennlinie $A(\epsilon)$. Weitere Vergleiche folgen später. Zunächst wird beim angesprochenen Modell eine Vertauschung der Signale bzw. Filterzweige vorgenommen.

Fall 2: $s_1(t)$ Referenz

$$s_2(t) = n(t) \quad \text{weißes Rauschen} \quad .$$

Durch Vertauschen der Indizes $s_2 \rightarrow s_1$; $s_1 \rightarrow n$ sind die Beziehungen für die benötigten Korrelationsfunktionen aus Gl. (3.63a) usw. sofort angebar.

$$R_{Y_1}(\tau) = 2 \cdot R_{s_1}(\tau) - R_{s_1}(\tau + 2T_1) - R_{s_1}(\tau - 2T_1) \quad (3.65)$$

$$R_{Y_2}(\tau) = N_0 \cdot \delta_0(\tau) \quad .$$

Die Produktbildung für $R_{n_1}(\tau)$ führt auf das gleiche Ergebnis wie beim Fall 1.

Offenbar spielt es also bezüglich des transformierten Rausch einflusses beim Verzögerungskorrelator keine Rolle, auf welchen Korrelatorzweig das Empfangsrauschen eingekoppelt wird.

Ein Teil der hier erörterten Ergebnisse ist ohne Ableitung durch [12] bestätigt. Untersuchungen über Korrelatoren mit analogen Filterpaaren liegen in der zugänglichen Literatur bis jetzt allerdings noch nicht vor.

3.4.5 Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Messungen

Zur Absicherung der bisher berechneten Ergebnisse wurden Messungen mit allen behandelten analogen Korrelatoren vorgenommen. Dabei diente der bereits durch Bild 3.25 vorgestellte Meßaufbau in abgewandelter Form als Basis. Statt des PN-Generators 1 wurde ein Rauschgenerator verwendet, der im Bereich 30 Hz bis 600 kHz weißes Rauschen mit einem Effektivwert von 1V erzeugte.

Der PN-Generator 2 wurde mit $f_c = 1 \text{ kHz}$ ($T_c = 1 \text{ ms}$) getaktet und erzeugte eine -1, 1 Pseudo-Noise-Folge der Länge $p = 511$. Der Produktprozeß wurde mit einem Spektralanalysator des Typs hp 3580 A mit angeschlossenem Schreiber im Frequenzbereich von ca. 10 Hz bis 5 kHz aufgezeichnet. Die Meßbandbreite dieses Suchtonverfahrens betrug $B = 30 \text{ Hz}$. Für einen Durchlauf des betrachteten Frequenzbereiches wurden etwa 17 Minuten benötigt. Damit ist offensichtlich, daß die Meßergebnisse eine sehr große Streuung aufweisen müssen, denn für die Messung von Größen, die aus Momenten 2. Ordnung entstehen ($\text{AKF } R_x(\tau)$ bzw. $\text{LDS } S_n(\omega)$), sind bei ausreichender Erwartungstreue einige 10 Stunden erforderlich. Aus diesem Grunde kann auch nur die Tendenz von Meßergebnis und theoretischem Wert verglichen werden. Da der angesprochene Spektralanalysator den Effektivwert der Spannung anzeigt, ist eine Meßgröße proportional $\sqrt{S_n(\omega)}$ zu erwarten. Eine absolute Eichung des Meßaufbaues erfolgte nicht; es wurde nur für alle gemessenen Modellformen gleicher Effektivwert des Rauschens $n(t)$ und gleicher Maximalwert der Referenzfolge $s(t)$ eingestellt. Außerdem sind bei den RC-, RLC- und Impulsformerkorrelatoren in einem Filterzweig konstante Verstärkungsfaktoren mit $v = 4$ vorgesehen worden, wodurch ein direkter Vergleich von Allpaß-Modell mit dem RC-Filterpaarkorrelator möglich ist. Die Eichung der y-Anzeige bei den Meßergebnissen blieb bei allen Messungen konstant; damit ist zumindest ein grober Vergleich für die Modelle (RLC-, Impulsformersystem), bei denen keine theoretischen Ergebnisse bezüglich $S_n'(\omega)$ vorliegen, mit dem RC- bzw. Allpaßkorrelator erlaubt. Die Messungen sind mit den auf maximale Regelkennlinie optimierten Systemen ausgeführt worden.

Wegen des konstruktiven Aufbaues des Spektralanalysators können die Werte von $S_n(0)$ nur durch Extrapolation des Kurvenverlaufs gewonnen werden.

Ergebnisse: RC-CR-System, Fall 1, d.h. Rauschen $n(t)$ erregt das Tiefpaßsystem. Bild 3.43a zeigt den nach Gl. (3.55) bestimmten theoretischen Verlauf für drei verschiedene Werte von $b = \frac{T_c}{T}$, während die Abbildung 3.43b das entsprechende Meßergebnis für $b = 1,8107$ präsentiert.



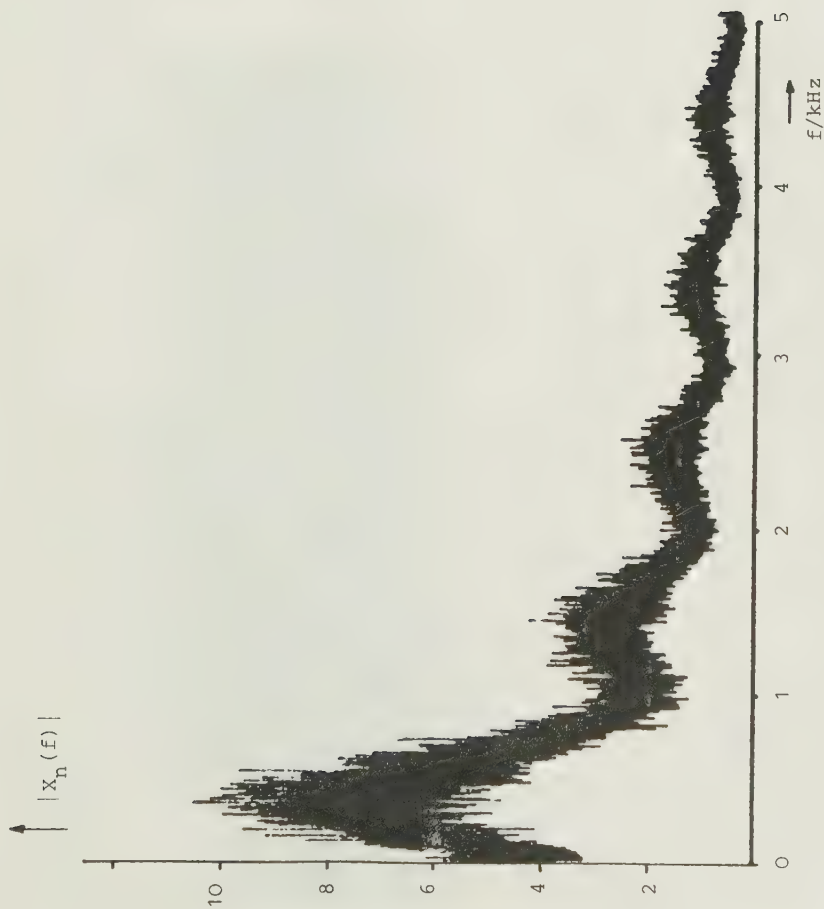


Bild 3.43b Meßergebnis für RC-Korrelator mit $b = 1,8107$

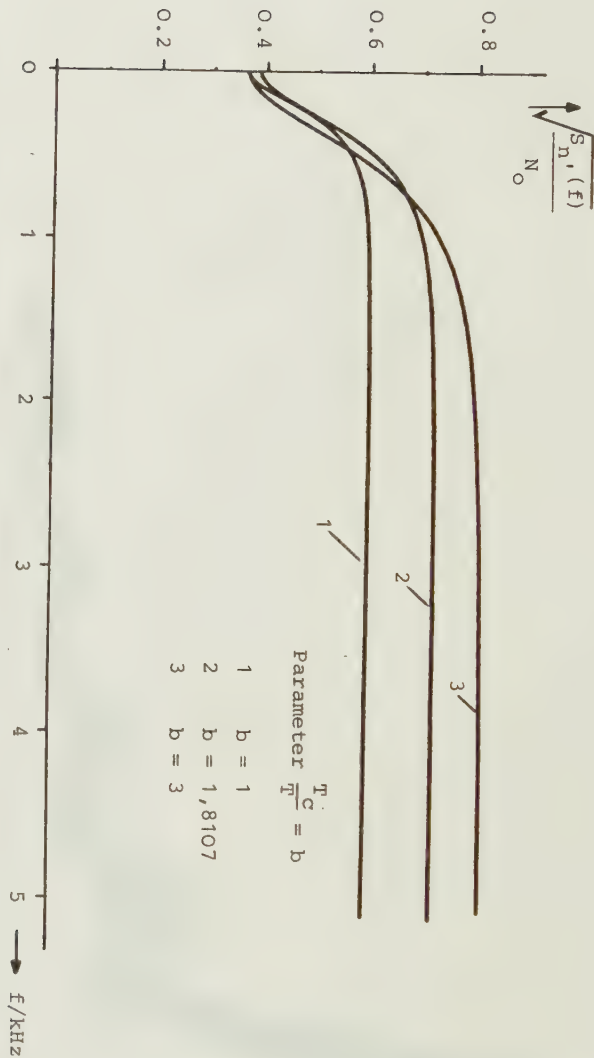


Bild 3.44a

Rechnerischer Verlauf des Rauschspektrums beim RC-Korrelator mit vertauschten Filterzweigen

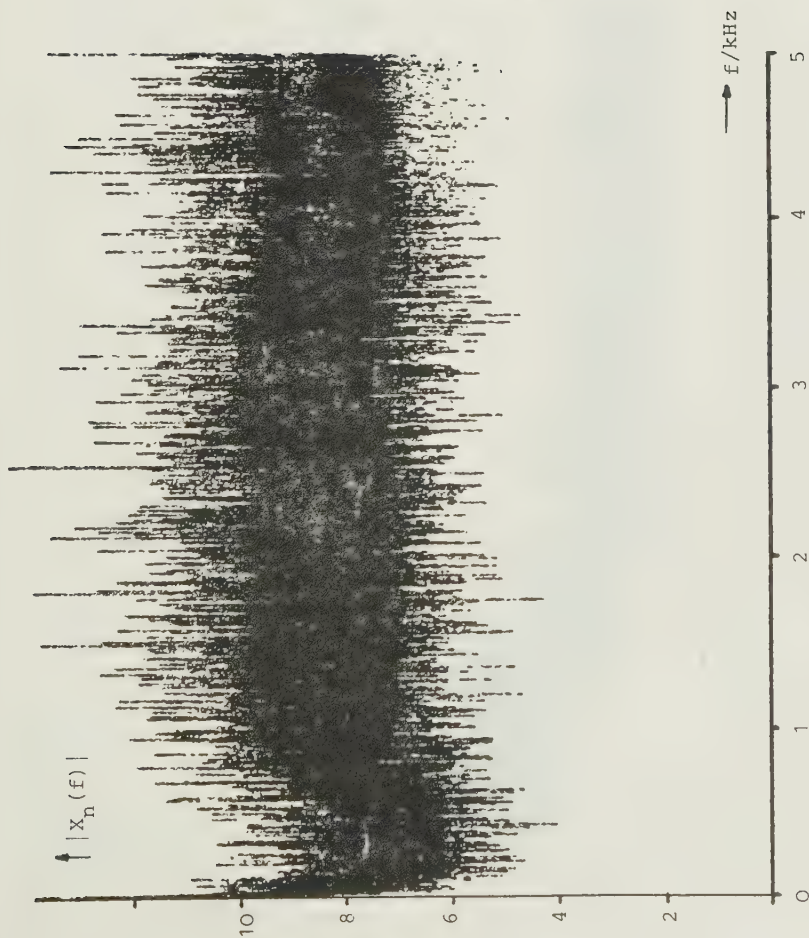


Bild 3.44b Meßergebnis für $b = 1,8107$

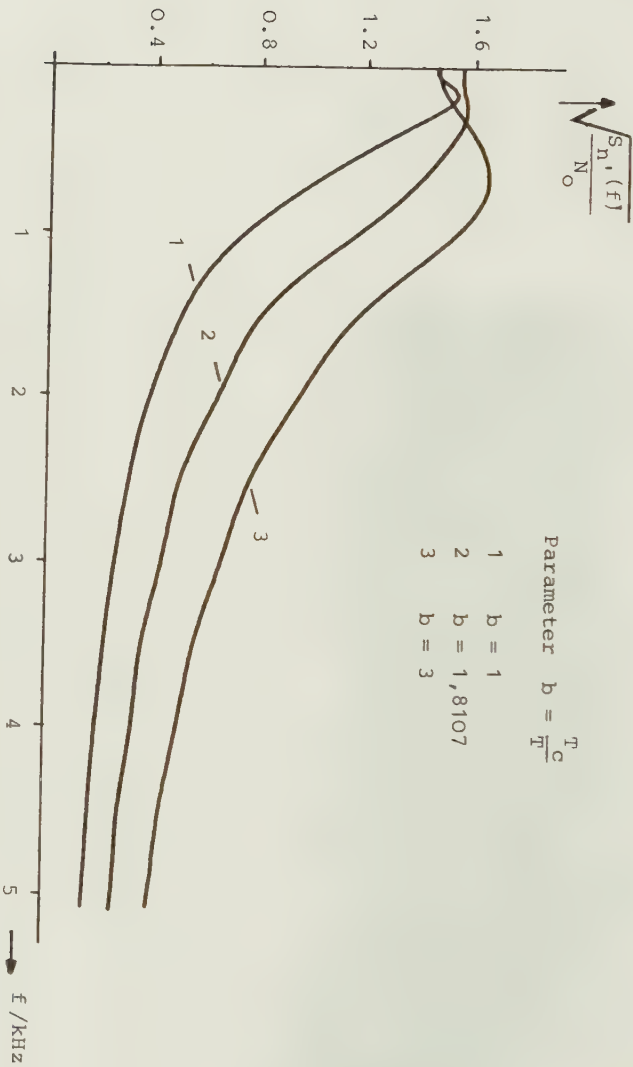


Bild 3.45a

Rechnerischer Verlauf des Rauschspektrums beim
Alpabmodell mit Rauscheinfluss auf den Bandpaß-
filterzweig

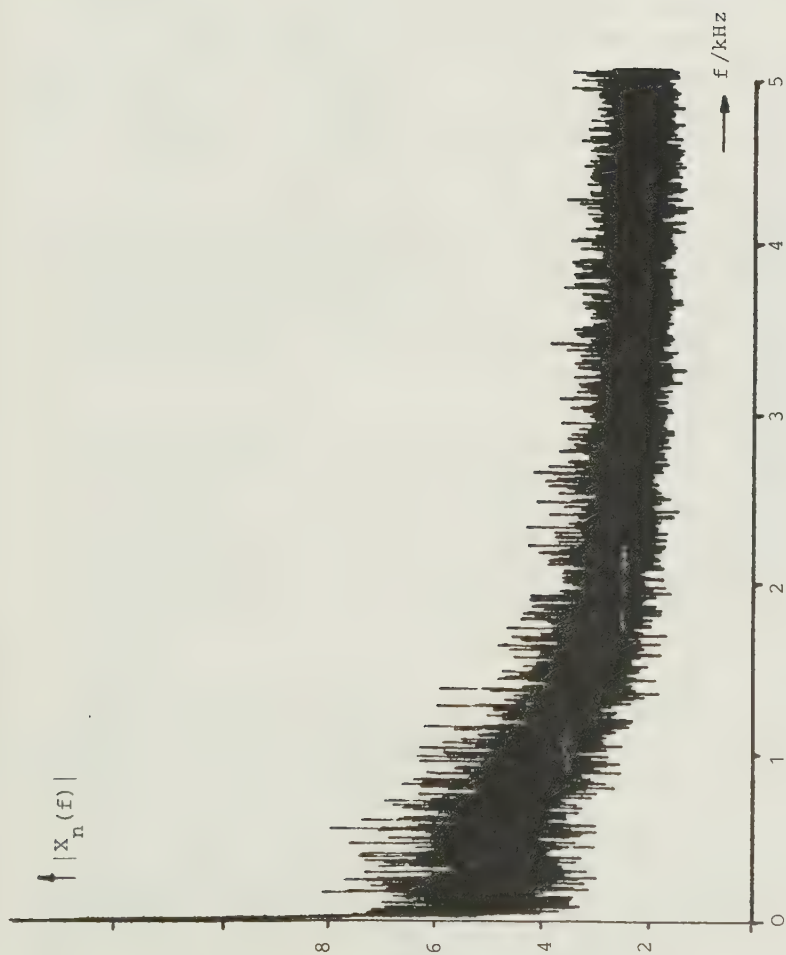


Bild 3.45b Meßergebnis für Allpaß-Korrelator mit $b = 1,8107$

Für den Fall 2 des RC-Korrelators, d.h. daß das Hochpaßsystem mit dem weißen Rauschen erregt wird, sind die entsprechenden Ergebnisse den Bildern 3.44a und b entnehmbar. Schließlich zeigen die Bilder 3.45a und b die Verhältnisse für das Allpaßmodell im Fall 1, bei dem der Bandpaßzweig des Korrelators mit Rauschen gespeist wird.

Unter Berücksichtigung der schon erwähnten eingeschränkten Genauigkeit der Messungen ist zu ersehen, daß die Tendenz der Meßergebnisse die theoretischen Ergebnisse bestätigt. Insbesondere ist die getroffene Annahme über die statistische Unabhängigkeit und damit Unkorreliertheit von Rauscheinfluß zur Referenzfolge als gültig anzusehen.

Ein Vergleich der mit RLC- bzw. Impulsformersystemen ausgerüsteten Korrelatoren mit dem Allpaß- bzw. RC-Modell erfolgt in dieser Arbeit nur meßtechnisch, da eine entsprechende Berechnung der zugehörigen Leistungsdichtespektren einen in diesem Rahmen unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand darstellen würde.

Zunächst ist im Bild 3.46 für das RLC-Korrelatorsystem im Fall 1, bei dem das Rauschen $n(t)$ das Tiefpaßsystem speist, das Meßergebnis aufgeführt.

Vertauschen der Filterzweige führt zum im darauffolgenden Bild 3.47 dargestellten Spektrum. Dieses Bild zeigt auch den Fall 2 für den Impulsformer-Korrelator, bei dem der Bandpaß mit $n(t)$ erregt ist.

Der Vollständigkeit wegen ist im Bild 3.48 noch das Meßergebnis für den Fall der Tiefpaß-Rauscherregung des Impulsformer-Korrelators angegeben.

Der Vergleich der Bilder 3.46, 3.47 und 3.48 macht deutlich, daß es für einen gewünschten niedrigen Wert von $S_n(0)$ und einen raschen Abfall des Rauschspektrums immer günstiger ist, das Empfangsrauschen bei höhergradigen Filtern des Korrelators auf den Tiefpaßzweig einwirken zu lassen. Um einen Gütevergleich der betrachteten analogen Korrelatoren untereinander und zum bekannten in der Literatur ausführlich behandelten Verzögerungskorrelator |12| möglich zu machen, werden

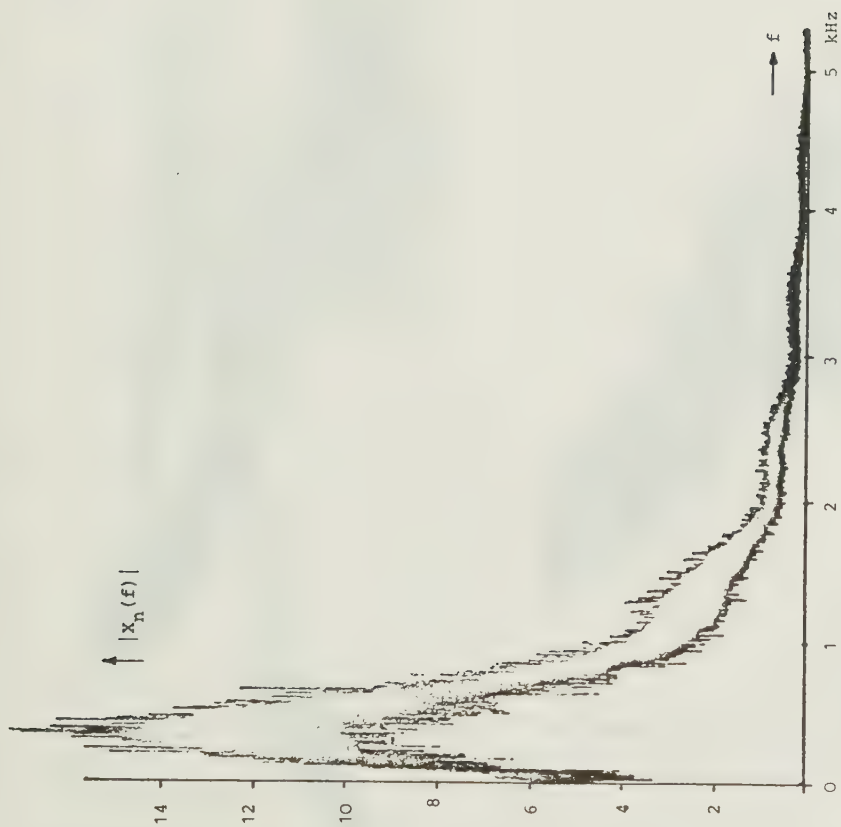


Bild 3.46 Spektraler Verlauf von $|X_n(f)|$ beim RLC-Korrelator mit Rauscherregung des Tiefpaßzweiges

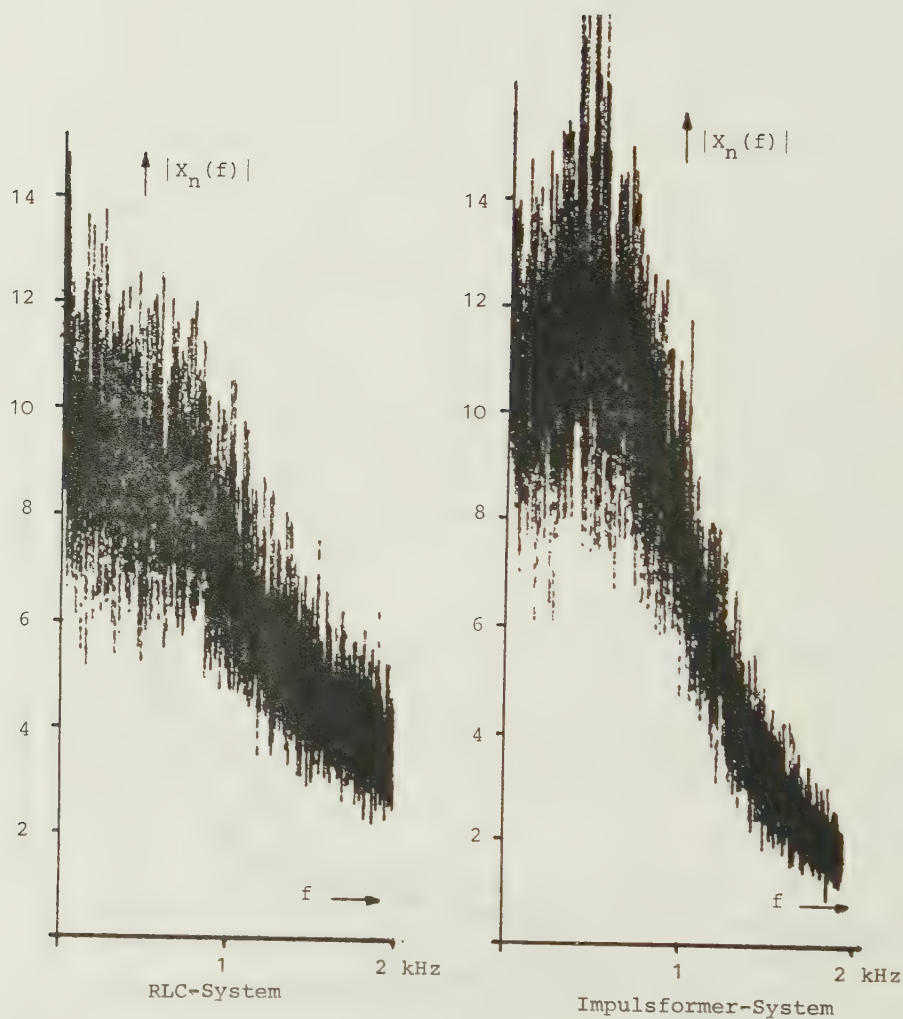


Bild 3.47 Spektrum im Fall der Bandpaßspeisung mit weißem Rauschen für den optimierten RLC- und den Impulsformer-Korrelator

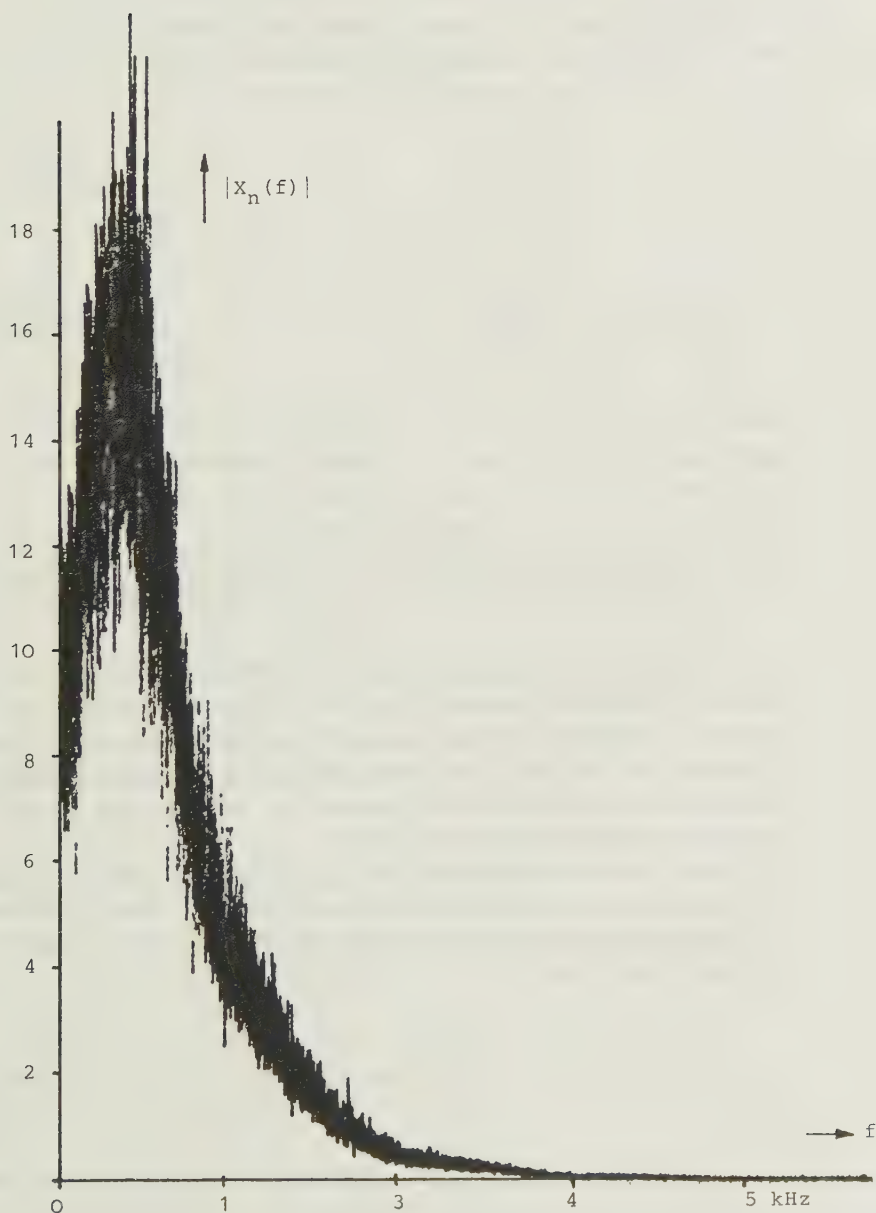


Bild 3.48

Spektrum $|X_n(f)|$ des Impulsformer-Modelles
bei Erregung des Tiefpasses mit weißem Rauschen

die Faktoren N und M eingeführt. Diese beziehen sich auf das Verhältnis des spektralen transformierten Rauschwertes bei $\omega \approx 0$ zum Maximum der Regelkennlinie $A(\epsilon)$ bzw. auf die Steigung der Kennlinie um den Nullpunkt der Verzögerungsdifferenz ϵ . Es ist

$$N = \frac{\sqrt{S_n, (0)}}{\max\{A(\epsilon)\}} \quad (3.66a)$$

$$M = \frac{\sqrt{S_n, (0)}}{\left. \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0}} \quad (3.66b)$$

Dabei stellt der Wert M, welcher ebenso wie der Faktor N möglichst klein sein soll, für eine linearisierte Betrachtung der Regelkennlinie beim geschlossenen Regelkreis (s. später) die wichtigere Größe dar s.a. [12]. Dieses Verhältnis bestimmt nämlich unmittelbar die Varianz des Zeitverzögerungsfehlers beim DLL, wie noch gezeigt wird.

3.4.6 Auswahl des günstigsten analogen Korrelators

Basierend auf den theoretischen erhaltenen Ergebnissen der vorigen Abschnitte und den ausgeführten Messungen zeigt die folgende Tabelle eine Übersicht der bisher angesprochenen Korrelationsnetzwerke zur Erzeugung der für den DLL erforderlichen Korrelatorkennlinie.

Da die entsprechenden Werte für $S_n, (0)$ für das RLC- und das Impulsformer-Korrelationsnetzwerk den mit starker Streuung versehenen Meßwerten entnommen sind, stellen sie nur Abschätzungen dar.

Korrelator	$\max\{A(\epsilon)\}$	$\left.\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon}\right _{\epsilon \rightarrow 0}$	$\sqrt{S_n, (0)}$	N	M
RC-CR (Faktor 4)	0,998	$3,346/T_C$	$1,545\sqrt{N_O}$	$1,548\sqrt{N_O}$	$0,462\sqrt{N_O} \cdot T_C$
optimale Verzög.- Struktur	1	$\frac{2}{T_C}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{N_O}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{N_O}$	$0,707\sqrt{N_O} \cdot T_C$
RLC (Faktor 4)	1,393	$\frac{3,7}{T_C}$	$3,38\sqrt{N_O}$	$2,426\sqrt{N_O}$	$0,914\sqrt{N_O} \cdot T_C$
Impulsformer (Faktor 4)	1,857	$\frac{6,29}{T_C}$	$3,96\sqrt{N_O}$	$2,132\sqrt{N_O}$	$0,63\sqrt{N_O} \cdot T_C$
Allpaß- Struktur	0,998	$\frac{3,346}{T_C}$	$1,545\sqrt{N_O}$	$1,548\sqrt{N_O}$	$0,462\sqrt{N_O} \cdot T_C$

Demzufolge sind RC-, Allpaß- und Impulsformer-Korrelator bezüglich M günstiger als der bisher ausführlich in der zugänglichen Literatur vorgestellte " $1T_C$ "-Verzögerungskorrelator. Bei größerer Rauschbandbreite des geschlossenen Kreises erweist sich der Allpaß-Korrelator mit einem Gewinn von etwa 53% als günstigste Struktur. Bei sehr geringen Rauschbandbreiten sind RC- und Allpaß-Modell annähernd äquivalent. Außerdem muß noch einmal ausdrücklich betont werden, daß die im 3. Kapitel vorgestellten mit analogen Filterpaaren ausgerüsteten Korrelatoren für beliebige Funktionen $s(t)$ Anwendung finden können. Bei dreieckförmiger AKF der verwendeten Signalklassen $s(t)$ sind die abgeleiteten Ergebnisse direkt übernehmbar, die bisher bekannten " $1-T_C$ "-Verzögerungsmodelle beschränken sich auf Verwendung von PN-Folgen, die mit geeignet rückgekoppelten Schieberegistern erzeugt werden. Weitere Untersuchung des auch interessanten Impulsformer-Korrelatormodelles entfällt hier aus Aufwandsgründen.

Bei dem im Kap. 3.4 betrachteten Einflüssen des transformierten Rauschens zum Ausgang des Korrelationsnetzwerkes

ist von einer aperiodischen AKF der Referenzfolge $s(t)$ ausgegangen worden. Liegen periodische Breitbandsignale $s(t)$ vor mit einer Periodenzeit, die sehr viel größer als die Kohärenzzeit des gefilterten Rauschens $n(t)$ ist, so sind die abgeleiteten Ergebnisse durch Produktdarstellung des transformierten Rauschprozesses $R_{n,}(\tau) = R_{y_1}(\tau) \cdot R_{y_2}(\tau)$ mit genügender Genauigkeit gültig.

Bei Einsatz von mehrstufigen Folgen (s. Kap. 4 und 5) mit dreieckförmiger (periodischer) AKF sind die abgeleiteten Ergebnisse für das transformierte Rauschen direkt übernehmbar. Anders verhält es sich bei dem Störeinfluß des durch die Multiplikation von Empfangs- und Referenzfolge hervorgerufenen sogenannten Eigenrauschens des Korrelationsnetzwerkes. Dieses Problem wird im nächsten Kapitel behandelt.

4. Störleistungsspektrum bei Korrelatoren mit analogen Filtern

4.1 Problemstellung, Verteilungsdichten

Im Gegensatz zum Kapitel 3.4 soll jetzt der Einfluß des sogenannten "Multiplikatorrauschens" bestimmt werden, d.h. bei dem im Bild 3.36 dargestellten Korrelator sei das Empfangssignal $s_1(t)$ durch $s(t-T)$ ohne Rauschstörung $n(t)$ und das Referenzsignal $s_2(t)$ durch $s(t-\hat{T})$ repräsentiert. Die AKF $R_x(\tau)$ folgt aus Gl. (3.45) für $n(t) = 0$.

$$R_x(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t+\tau)\} = E\{y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau)\}.$$

Da starke statistische Abhängigkeiten zwischen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ und damit zwischen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ existieren, die u.a. von der relativen Verschiebung ε zwischen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ abhängen, ist eine Vereinfachung der Erwartungswertbildung hier nicht möglich. Es müßte das Moment 4. Ordnung angebar sein. In dieser Richtung ist bisher kein mathematischer Ansatz bekannt, da die Verteilungsdichten der Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ von einer gaußschen Verteilungsdichte extrem abweichen. Selbst bei der Verwendung mehrstufiger Folgen $s_v(t)$ kann auch nicht näherungsweise mit einer Gaußverteilung gerechnet werden; sonst wäre über einen Ansatz mit zweidimensionaler Systemtheorie (Volterra-Entwicklung quadratischer, d.h. multiplikativer Einflüsse) eine geschlossene Lösung für $S_x(\omega)$ angebar. Bei der Beschränkung auf zweiwertige Pseudo-Noise-Signale $s(t)$ mit der Amplitudenverteilungsdichte $w(-1) = (\frac{p-1}{2p}) \cdot \delta_0(a+1)$ und $w(+1) = (\frac{p+1}{2p}) \cdot \delta_0(a-1)$ werden bei Filterung mit Systemen 1. Ordnung (RC-Tiefpaß) bei bestimmten Verhältnissen von Filterzeitkonstante zur Chipzeit der PN-Folge nur gauß-ähnliche Verteilungsdichten erreicht, s. [73], [74]. Nun liegt aber durch die Optimierung der Kennlinie $A(\varepsilon)$ das Verhältnis $\frac{T_C}{T}$ bereits fest und für $b_{\text{opt}} \approx 1,81$ weicht die Ausgangs-Verteilungsdichte erheblich von einer gauß'schen Form ab [25].

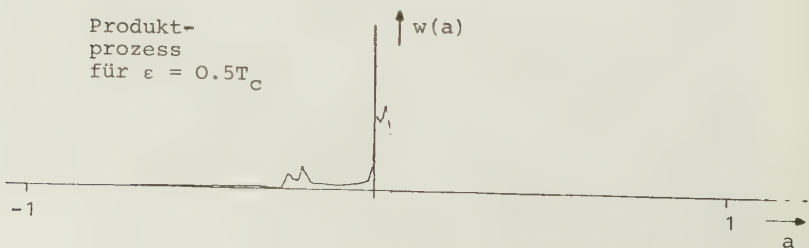
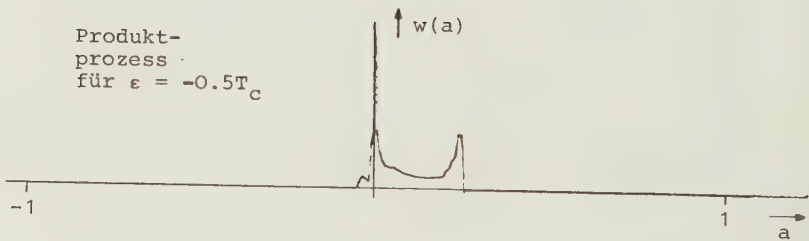
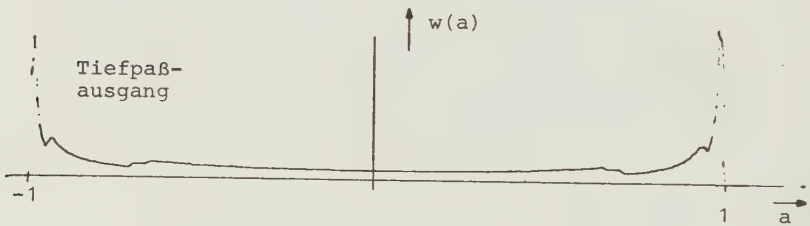
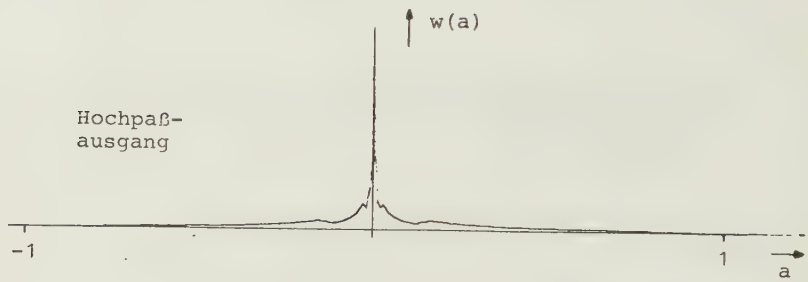


Bild 4.1 Verteilungsdichten $w(a)$ des RC-Modells

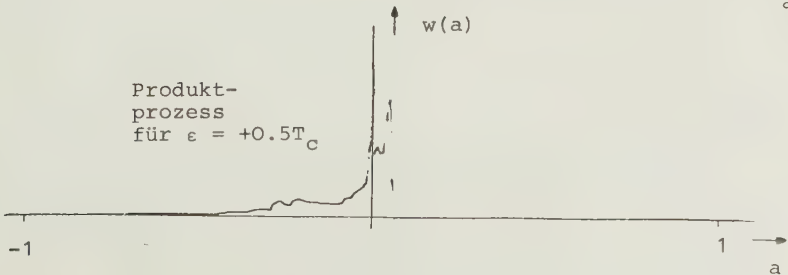
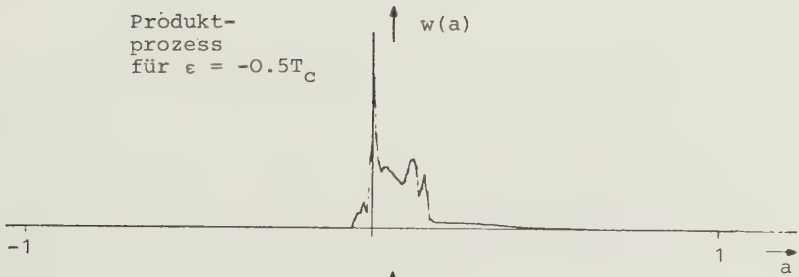
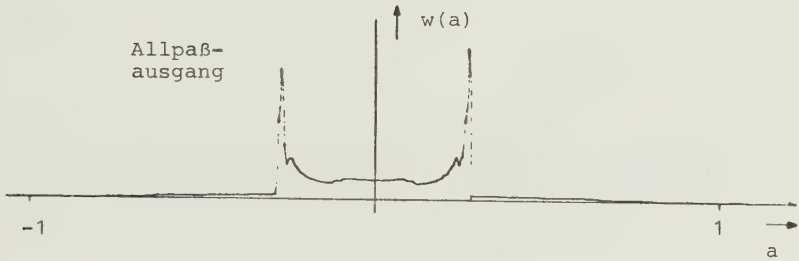
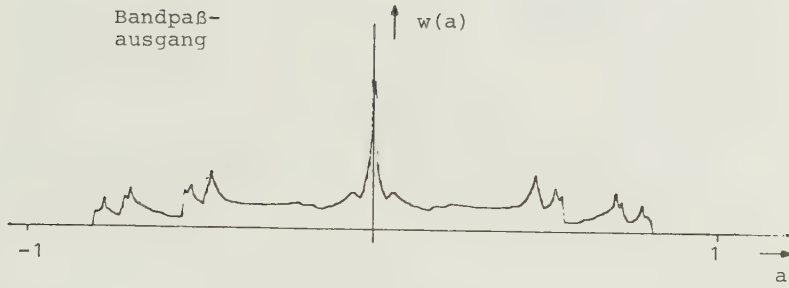


Bild 4.2 Verteilungsdichten des Allpaß-Korreлятора

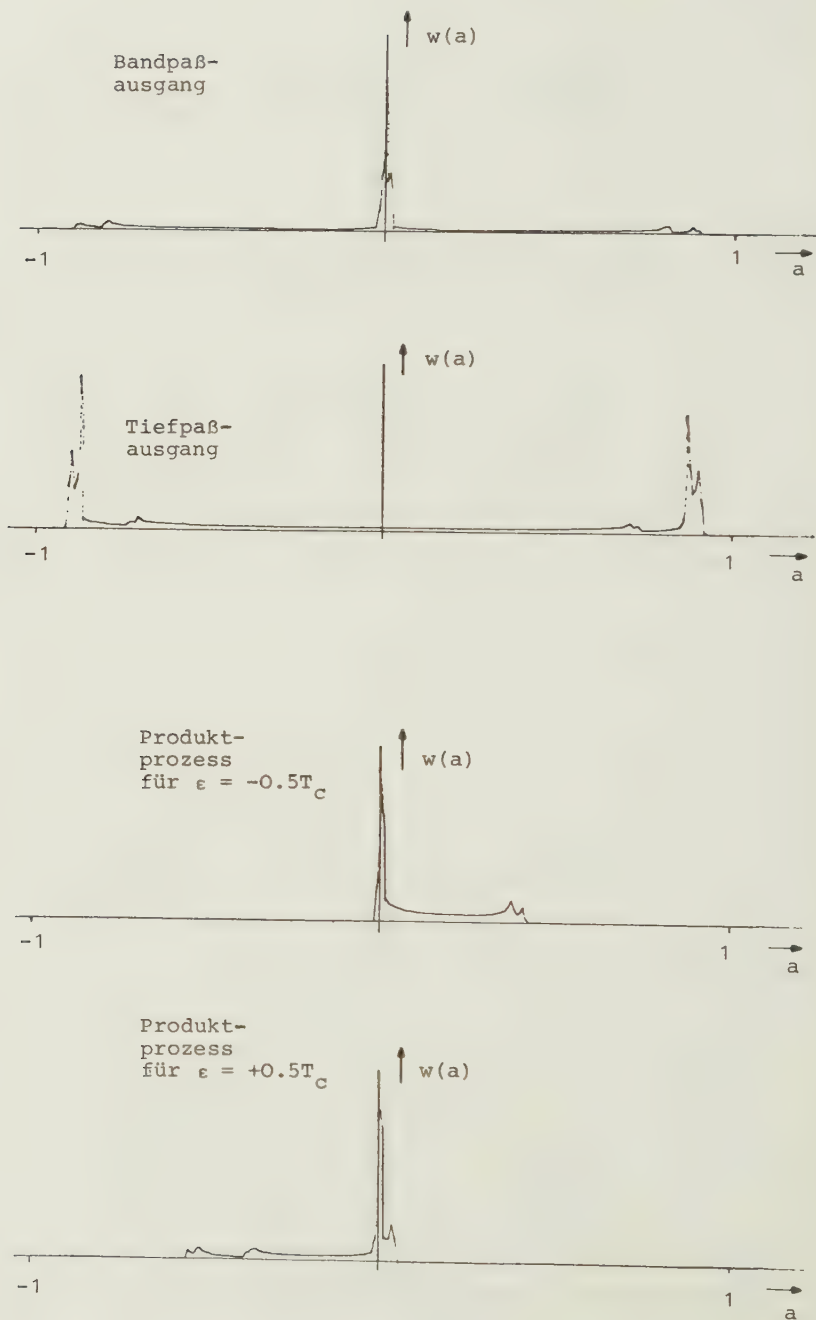


Bild 4.3 Verteilungsdichten des RLC-Korrelators

Um eine Übersicht der bei den analogen Korrelatoren auftretenden Funktionsverläufe von $w(a)$ zu erhalten, wurden mit einem Häufigkeitsmeßgerät die Verteilungsdichten für die optimierten Korrelatormodelle gemessen. Die Folgenlänge betrug $p = 127$. Bild 4.1 zeigt die Verteilungsdichten des RC-Systems nach der Hochpaß- bzw. Tiefpaßfilterung und die des Produktprozesses $x(t)$ für Verschiebungen um $\pm \epsilon$ beider speisenden Folgen. Die entsprechenden Ergebnisse für den Allpaß- und den RLC-Korrelator sind in den Bildern 4.2 und 4.3 dargestellt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß auch bei mehrgradiger Filterung (RLC-Allpaßmodell) die Verteilungsdichten schon an den Filterausgängen kaum übersichtlich mathematisch beschreibbar sind; noch komplizierter werden die Verhältnisse für den Produktprozeß $x(t)$. Es ist dem Verfasser auch kein mathematischer Ansatz für die Transformation der Eingangsverteilungsdichten der vorliegenden Form über lineare Systeme mit Gedächtnis bekannt geworden. Aus diesem Grunde wird auf anderem Weg versucht, das Leistungsdichtespektrum $S_x(\omega)$ von zwei gegeneinander verschobenen und gefilterten PN-Folgen zu bestimmen.

4.2 Das Leistungsdichtespektrum $S_x(\omega)$ beim RC-Modell

Das Problem der Bestimmung des Leistungsdichtespektrums, das bei der Multiplikation gefilterter (bandbegrenzter) und um ϵ gegeneinander verschobener Pseudo-Noise-Folgen auftritt, ist bis heute geschlossen nicht gelöst worden. Meffert [47] gibt für den Sonderfall $\epsilon = 0$ und gleicher Vorfilterung mit idealen Tiefpässen in beiden Korrelatorzweigen zwar eine Lösung für den weiteren Sonderfall an, daß $s(t)$ echte Zufallsfolgen sind; die beim RC-Korrelator vorliegende Problematik der Tiefpaß-Hochpaßfilterung bei zueinander verschobenen Eingangssignalen ist aber damit nicht erfaßt.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen wurde in [20] das Leistungsdichtespektrum $S_x(\omega)$ beim RC-Korrelator bei Betrieb mit langen ($p > 511$) Pseudo-Noise-Folgen rechnerisch bestimmt und mit entsprechenden Messungen abgesichert. Dabei diente ein von Grünberger [29] in anderem Zusammenhang gewählter Ansatz zur Beschreibung der Eingangsfolgen als Basis. Infolge der Komplexibilität und des Umfanges der Ergebnisse muß in diesem Zusammenhang auf [20] verwiesen werden. Die dort erhaltenen Ergebnisse stimmen im Mittel mit den Messungen überein, da u.a. von einer statistischen Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Bits in der PN-Folge ausgegangen wird. Bei diesem Ansatz ist gerade bei Filterung über gedächtnisbehaftete Systeme Vorsicht am Platz, s. [21]. Für relativ kurze PN-Folgen sind infolge der durch die Periodizität bedingten Linienstruktur des Spektrums $S_x(\omega)$ die Ergebnisse aus [20] nicht brauchbar. Um diese Lücke zu schließen, sind die folgenden Untersuchungen vorgenommen worden.

4.3 Verwendung von kurzen PN-Folgen als Basissignal $s(t)$

4.3.1 Systemtheoretische Generierung von PN-Folgen

Bisher wurden die verwendeten Basisfunktionen $s(t)$ durch Angabe der zugehörigen Autokorrelationsfunktionen statistisch beschrieben. Nun ist aber speziell eine PN-Folge ein determiniertes periodisches Signal, von dem, wenn auch aufwendiger als bei anderen determinierten Signalen, eine Fouriertransformierte $S(j\omega)$ angebbar sein muß.

Die Filterung und anschließende Multiplikation der Signale $y_1(t) \circ \bullet Y_1(j\omega)$ und $y_2(t) \circ \bullet Y_2(j\omega)$ läßt sich dann durch Multiplikation und Faltung im Frequenzbereich beschreiben. Eine weitere Vereinfachung wird unter bestimmten noch zu definierenden Voraussetzungen darin bestehen, Einzelsegmente aus den periodischen Signalen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu betrachten, und die periodische Wiederholung erst nach der Multiplikation im Zeitbereich als quasilinear bezüglich der Periodizität anzusehen.

Eine PN-Folge der Länge $p = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist eine mit $p \cdot T_C$ periodische Signalform, d.h. $s(t) = s(t + p \cdot T_C)$ mit T_C als Chipbreite der Einzelrechtecke. Sie besitzt bei den hier vorgenommenen Betrachtungen die beiden Amplituden -1 und 1 wie in Bild 4.4 dargestellt.

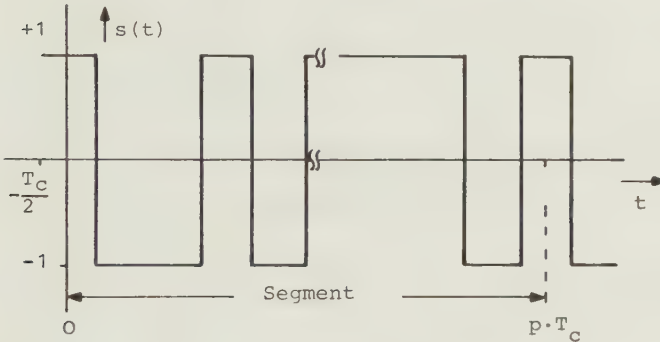


Bild 4.4 $-1, 1$ PN-Folge und Definition des Segmentes

Ein Segment lässt sich dann mit a_v ($a_v \in \{-1, 1\}$) bewerteten Einzelrechtecken

$$r(t) = \text{rect} \frac{t}{T_C} \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T_C}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der Form

$$s_S(t) = r(t) * \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot \delta_0(t - vT_C) \quad . \quad (4.1)$$

darstellen. Die a_v folgen dann den PN-Folgen eigenen Gesetzen, s. [21], [32], [66]. Fouriertransformation des Einzelrechteckes führt zur bekannten $\frac{\sin x}{x} = \text{sinc}$ Funktion für den spektralen Verlauf.

$$R(j\omega) = \mathcal{F}\{r(t)\} = T_C \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_C}{2}}{\omega \frac{T_C}{2}} \quad . \quad (4.2)$$

Die in Gl. (4.1) angegebene endliche Summe kann im Frequenzbereich als ein nichtrekursives System vom Grade $p-1$ gedeutet

werden. Man kann sie durch

$$B(j\omega) = \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot e^{-j\omega v T_c} \quad a_v \in \{-1, 1\} \quad (4.3)$$

beschreiben. Dafür gilt weiterhin:

$$B(j\omega) \cdot B^*(j\omega) = |B(\omega)|^2 \stackrel{!}{=} D(\omega) \quad (4.4)$$

$D(\omega)$ ist ein Spiegelpolynom in $e^{-j\omega T_c}$. Dieses hat für äquidistante Werte $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_c}$ mit $k = 1, (1), (p-1)$ auch gleichgroße Werte, wie im folgenden gezeigt wird:

Die AKF einer periodischen PN-Folge mit $a_v \in \{-1, 1\}$ ist

$$R_{PN}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1 + \frac{1}{p}}{T_c} \cdot |\tau| & \text{für } |\tau| \leq T_c \\ -\frac{1}{p} & T_c \leq \tau \leq (p-1)T_c \end{cases} \quad (4.5)$$

und $R_{PN}(\tau) = R_{PN}(\tau \pm p \cdot T_c)$.

Sie ist bis auf eine konstante Verschiebung um $\frac{1}{p}$ und Bewertung mit einer Konstanten vergleichbar mit der AKF $R_r(\tau)$ eines periodischen Einzelrechteckes, d.h. für $r(t) = r(t \pm p \cdot T_c)$ ist

$$R_r(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_c}\right) & \text{für } |\tau| \leq T_c \\ 0 & \text{für } T_c \leq \tau \leq (p-1)T_c \end{cases} \quad (4.6)$$

und $R_r(\tau) = R_r(\tau \pm p \cdot T_c)$.

Es muß also mit der noch zu ermittelnden Konstanten K gelten:

$$\left(R_{PN}(\tau) + \frac{1}{p} \right) \Big|_{|\tau| \leq T_c} = K \cdot R_r(\tau) \quad (4.7)$$

Ersetzen der linken Gleichungsseite durch Gl. (4.5) führt zu

$$\left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1 + \frac{1}{p}}{T_c} |\tau| \right) = \left(1 + \frac{1}{p} \right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_c} \right) = K \cdot R_r(\tau)$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (4.6) für den letzten Term folgt unmittelbar

$$K = 1 + p \quad . \quad (4.8)$$

Fouriertransformation der AKF nach Gl. (4.5) bzw. (4.6)

führt auf ein Linienspektrum im äquidistanten Abstand

$\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_C}$ und $\text{si}^2(\omega)$ - Einhüllender.

Die entsprechende Aussage der Gl. (4.7) führt im Spektralbereich für $\omega > 0$, d.h. ohne Gleichanteil auf:

$$|S_{PN}(j\omega)|^2 = K |S_r(j\omega)|^2 \quad .$$

Diese Beziehung gilt auch für die Spektren einzelner Segmente. Mit (4.1) und (4.3) ergibt sich also:

$$S_s(j\omega) = S_r(j\omega) \cdot B(j\omega) \quad \text{und}$$

$$|S_s(j\omega)|^2 = |S_r(j\omega)|^2 \cdot |B(j\omega)|^2 \quad .$$

Bei periodischen Autokorrelationsfunktionen gilt dann für $\omega = \omega_k \neq 0$

$$|S_s(j\omega_k)|^2 = |S_{PN}(j\omega_k)|^2 = |S_r(j\omega_k)|^2 \cdot |B(j\omega_k)|^2 = K \cdot |S_r(j\omega_k)|^2$$

Somit folgt:

$$|B(j\omega_k)|^2 = K = 1+p \quad \text{für} \quad \omega_k = \frac{2\pi}{p \cdot T_C} k \quad .$$

Der Wert für $B(j\omega=0)$ folgt unmittelbar aus Gl. (4.3)

$$B(j0) = \sum_{v=0}^{p-1} a_v = +1$$

da eine PN-Folge genau ein Element $\left(\frac{+}{-}\right)$ 1 mehr enthält als Elemente mit $\left(\frac{+}{-}\right)$ 1. Das eine PN-Folge beschreibende charakteristische Spiegelpolynom hat daher folgende Eigenschaften:

$$D(\omega) = B(j\omega) \cdot B^*(j\omega) = \begin{cases} p+1 & \text{für } \omega_k = \frac{2\pi}{p \cdot T_C} k \\ & k = 1, (1), p-1 \\ 1 & \text{für } \omega = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Aufgrund dieser Eigenschaften ist nun folgende Aussage möglich: Es gibt mehrere Systeme $B_K(j\omega)$ mit gleichem Betragsfrequenzgang aber unterschiedlichem Phasengang, für die gilt

$$B_K(j\omega) \cdot B_K^*(j\omega) = D(\omega) \quad .$$

Solche Teilsysteme generieren andere als mit Gl. (4.1) beschriebene Zeitfunktionen, die i.a. mehrstufig sind, aber die gleiche Segment-AKF besitzen wie eine PN-Folge. Darauf wird später noch näher eingegangen.

Durch periodische Wiederholung eines Segmentes $s_S(t)$ entsteht die PN-Folge $s(t)$.

$$s(t) = s_S(t) * \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - \mu p \cdot T_C) \quad (4.10a)$$

$$S(j\omega) = S_S(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_C} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_O(\omega - \mu \frac{2\pi}{p \cdot T_C}) \quad (4.10b)$$

Das die periodische Wiederholung erzeugende System

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{p \cdot T_C} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_O(\omega - \mu \frac{2\pi}{p \cdot T_C}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega p T_C}} \quad (4.11)$$

kann dabei als ein bedingt stabiles rekursives, durch Bild 4.5 dargestelltes System betrachtet werden (Nur Pole auf der imaginären Achse der s-Ebene).

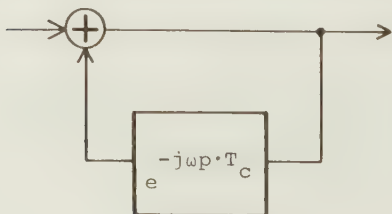


Bild 4.5 System $P(j\omega)$ zur Erzeugung der periodischen Wiederholung

Mit den bisher definierten Teilsystemen lässt sich nun ein Gesamtsystem angeben, welches bei Impulserregung eine periodische PN-Folge $s(t)$ am Ausgang abgibt. Sämtliche Teilsysteme sind linear und zeitinvariant und können deshalb beliebig in der im Bild 4.6 gezeigten Kaskade in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.

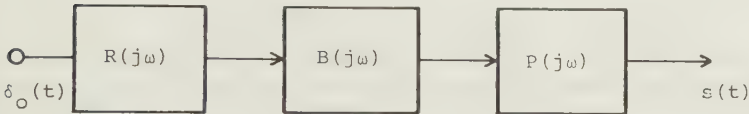


Bild 4.6 Das einem PN-Generator äquivalente Ersatzsystem

Mit dieser Ersatzdarstellung liegt das Spektrum einer PN-Folge der Länge p nach Betrag und Phase fest. Besitzt die Folge $s(t)$ statt der Amplituden $a \in \{-1, 1\}$ die Werte $a \in \{-A, A\}$, so erscheint in der folgenden Beziehung der neue Amplitudenwert als multiplikative Konstante.

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_c}{2}}{\omega \frac{T_c}{2}} \cdot \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot e^{-j\omega v T_c} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_O\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{p \cdot T_c}\right) \\
 &= T_c \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_c}{2}}{\omega \frac{T_c}{2}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{p-1} a_v e^{-j\omega v T_c}}{1 - e^{-j\omega p T_c}} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

4.3.2 Mehrstufige PN-Folgen bei gleicher AKF

Sind von einer PN-Folge die Periodenlänge p und die der Folge zugeordnete charakteristische AKF $R_{PN}(\tau)$ vorgegeben, so ergibt sich durch die endliche Vieldeutigkeit des Systems $B_k(j\omega)$ weiterhin die interessante Möglichkeit, weitere i.a. mehrstufige Folgen $s_k(t)$ zu erzeugen, die gleiches p und gleiche AKF $R_{PN}(\tau)$ besitzen, aber zwangsläufig eine andere Amplitudenverteilungsdichte aufweisen. Das prinzipielle Vor-

gehen wird mit dem Beispiel einer PN-Folge mit $p = 15$ und $a \in \{-1, 1\}$ erläutert. Die Folge der Koeffizienten für das Beispiel ist im Bild 4.7 dargestellt.

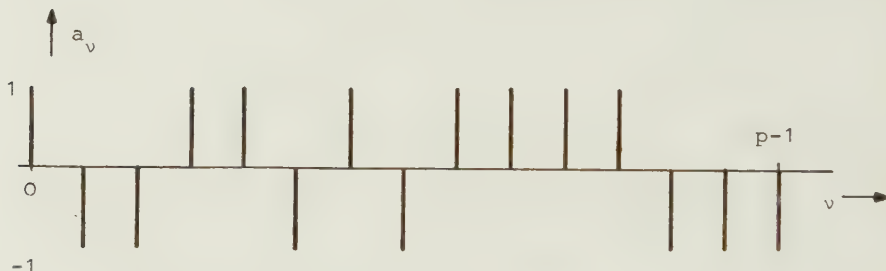


Bild 4.7 Zeitdiskrete Darstellung der Koeffizienten einer PN-Folge der Länge $p = 15$

Fouriertransformation der Zeitfunktion $\sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot \delta_0(t-vT_C)$

führt auf die charakteristische, die PN-Folge generierende

Funktion $B(j\omega) = \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot (e^{-j\omega T_C})^v$. Zur Vereinfachung der

Schreibweise wird gesetzt

$$e^{j\omega T_C} = z \quad . \quad (4.13)$$

Damit ergibt sich das charakteristische Polynom in z

$$B(z) = \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot z^{-v}$$

bzw. nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit z^{p-1}

$$B(z) = \frac{\sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot z^{p-1-v}}{z^{p-1}} \quad . \quad (4.14)$$

Für das betrachtete Beispiel erhält man nach Umformung der Summenform des Zählers in eine Produktform von Linearfaktoren (Nullstellensuche eines Polynoms vom Grade $(p-1)$) die zu $B(z)$ gehörige Pol-Nullstellen-Darstellung, kurz PN-Darstellung, in der komplexen z -Ebene, s. Bild 4.8a

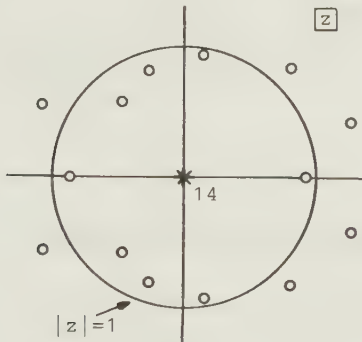


Bild 4.8a PN-Diagramm von $B(z)$ für die PN-Folge der Länge $p=15$ von Bild 4.7

Sofern komplexe Nullstellen auftreten, ergeben sich wegen der Reellwertigkeit von $B(z)$ immer konjugiert komplexe Paare. Das folgende Bild 4.8b zeigt den Betragsfrequenzgang und die Phase für ω auf dem Einheitskreis und bestätigt damit die im vorigen Abschnitt erhaltenen Beziehungen über $B(j\omega)$ und Gl. (4.8).

Die Spiegelpolynomdarstellung $D(z)$ wird mit s. [64]

$$D(z) = B(z) \cdot B\left(\frac{1}{z}\right) \quad (4.15)$$

erhalten, d.h. vom vorliegenden PN-Diagramm des Polynoms $B(z)$ kommt man zur entsprechenden PN-Darstellung von $B\left(\frac{1}{z}\right)$ durch Spiegelung aller Pole und Nullstellen am Einheitskreis $|z| = 1$ der z -Ebene. Dabei wandern die $(p-1)$ -fachen Pole bei 0 der einem nichtrekursivem System äquivalenten PN-Darstellung durch die Spiegelung ins Unendliche. Das so entstehende PN-Diagramm nach Gl. (4.15) zeigt Bild 4.8c für das angenommene Beispiel.

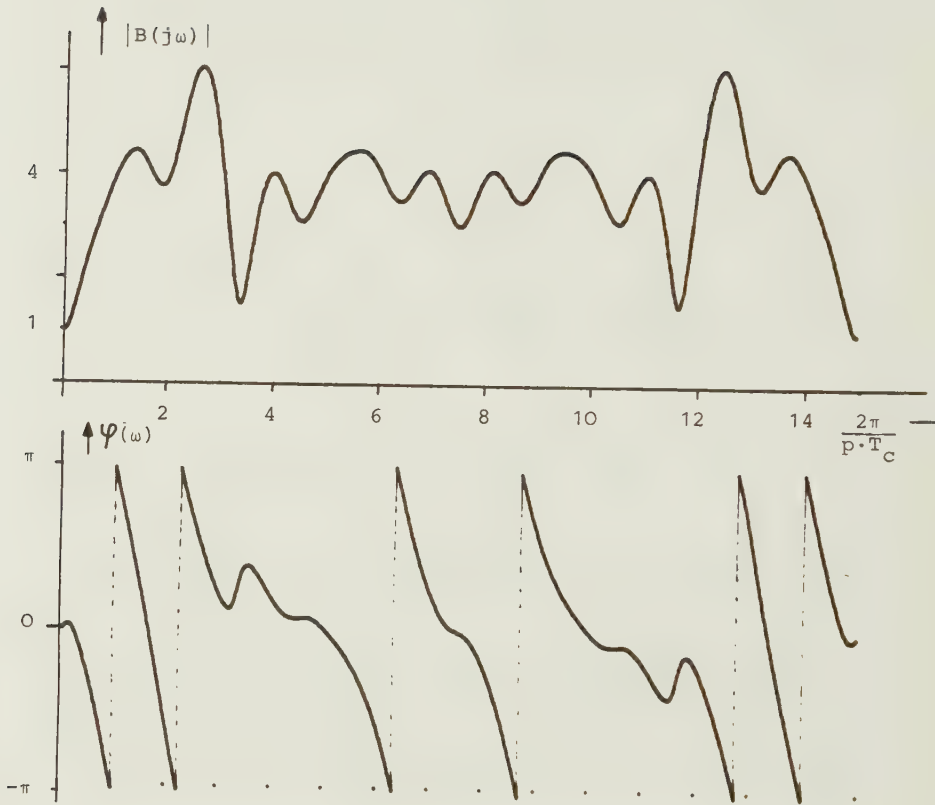


Bild 4.8b

Betrag und Phase des eine $p=15$ -PN-Folge
generierenden Systems $B(j\omega)$

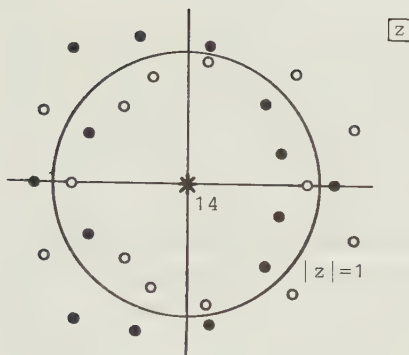


Bild 4.8c PN-Diagramm von $D(z)$ für $p=15$ -PN-Folge

Ausgehend von $D(z)$ können nun "rückwärts" wiederum mindestens $2^{(p-1)/2}$ verschiedene $B_k(z)$, welche allerdings die Beziehung (4.15) erfüllen müssen, gefunden werden.

Hier wird beispielsweise nur das minimalphasige System, zugeordnet dem Polynom $B_1(z)$ ausgewählt und durch Rücktransformation die zugehörige Folge $s_1(t)$ angegeben.

Das aus $D(z)$ ausgewählte System mit $B_1(z)$ wird mit seiner PN-Darstellung in Bild 4.8d vorgestellt. Es enthält wieder einen $(p-1)$ -fachen Pol bei $z=0$.

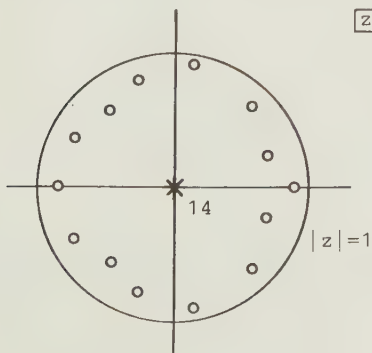


Bild 4.8d Ein ausgewähltes $B_1(z)$, die minimalphasige Variante

Umformung der Produktdarstellung von Linearfaktoren beim Zählerpolynom von $B_1(z)$ in die entsprechende Summenform, Division durch z^{p-1} und Rücktransformation in den Zeitbereich (hier sehr einfach, da durch die nichtrekursive Struktur nur Verzögerungen vorkommen) ergibt die zur Folge $s_1(t)$ gehörigen neuen Koeffizienten a_v mit $a_v \in \mathbb{R}$. Da bekanntlich eine PN-Darstellung einer komplexen Funktion diese bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig festlegt, ist eventuell eine Normierung in der Form der Multiplikation aller erhaltenen a_v mit einem Faktor F erforderlich. Dieser wird aus der Tatsache erhalten, daß $a_0 \cdot a_{p-1} = \pm 1$ sein muß, wobei sich das richtige Vorzeichen automatisch bei der Multiplikation der Linearfaktoren ergibt. F erhält man dann durch:

$$F = \frac{1}{\sqrt{|a_0 \cdot a_{p-1}|}} \quad .$$

Für die angesprochene minimalphasige Folge werden damit die in Tabellenform angegebenen a_v erhalten.

$a_0 = + 3,574319746$	$a_8 = - 0,195056419$
$a_1 = - 0,311015758$	$a_9 = - 0,534890345$
$a_2 = - 0,257833044$	$a_{10} = - 0,291125126$
$a_3 = - 0,501021971$	$a_{11} = + 0,540978173$
$a_4 = - 0,940100673$	$a_{12} = + 0,257473803$
$a_5 = - 0,239195944$	$a_{13} = - 0,024344206$
$a_6 = + 0,132095238$	$a_{14} = - 0,279773516$
$a_7 = + 0,069490087$	

Der Verlauf von $|B_1(j\omega)|$ ist der gleiche wie in Bild 4.8b dargestellt, den zugehörigen Phasenverlauf zeigt Bild 4.8e.

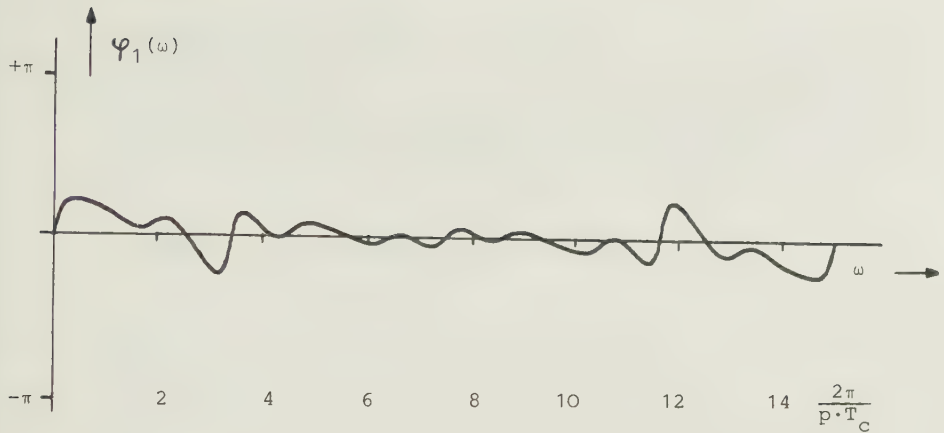


Bild 4.8e Phasenverlauf des minimalphasigen Systems $B_1(j\omega)$ für $p = 15$

Sämtliche möglichen Systeme $B_K(z)$, welche das gleiche Spiegelpolynom $D(z)$ nach Gl. (4.15) erfüllen, lassen sich aus $B_1(z)$ durch Zuschalten von (rekursiven) Allpässen $A(z)$ erzeugen. Dies wird anhand des Bildes 4.9 gezeigt, wobei die Kaskade von $B_1(z)$ mit $A_1(z)$ gerade wieder Basissystem zur Generierung der $-1, 1$ PN-Folge wird.

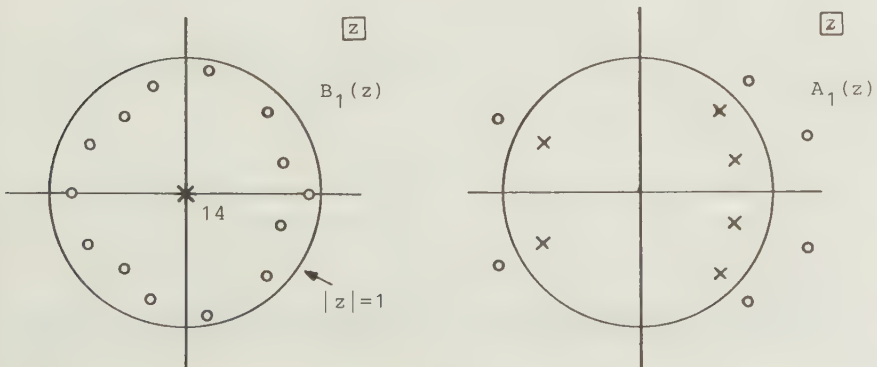


Bild 4.9 Zur Erzeugung des PN-Diagrammes von Bild 4.8a durch Kaskadierung des minimalphasigen Systems $B_1(z)$ mit einem geeigneten Allpaß $A_1(z)$

Bemerkenswert ist noch, daß alle erlaubten Systeme $B_K(z)$ sowohl die gleiche Segment-AKF $d(\lambda)$ als auch die den PN-Folgen eigene periodische AKF $R_d(\lambda) = d(\lambda) + d(\lambda - p)$ für $0 \leq \lambda \leq p$ besitzen. Dabei gilt für das durch die Segment-AKF $d(\lambda)$ eindeutig festgelegte Spiegelpolynom

$$D(z) = Z\{d(\lambda)\} = \sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} d(\lambda) \cdot z^{-\lambda} \quad (4.16)$$

mit

$$d(\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} b(k) \cdot b(k+\lambda) \quad (4.17)$$

und

$$B(z) = Z\{b(k)\} = \sum_{k=0}^{p-1} b(k) \cdot z^{-k} \quad (4.18)$$

Für die als Beispiel gewählte PN-Folge der Länge $p=15$ wird die zeitdiskrete AKF $d(\lambda)$ mit Gl. (4.17) erhalten. Sie ist, ebenso wie die periodisch fortgesetzte AKF $R_d(\tau)$, in Bild 4.10 dargestellt.

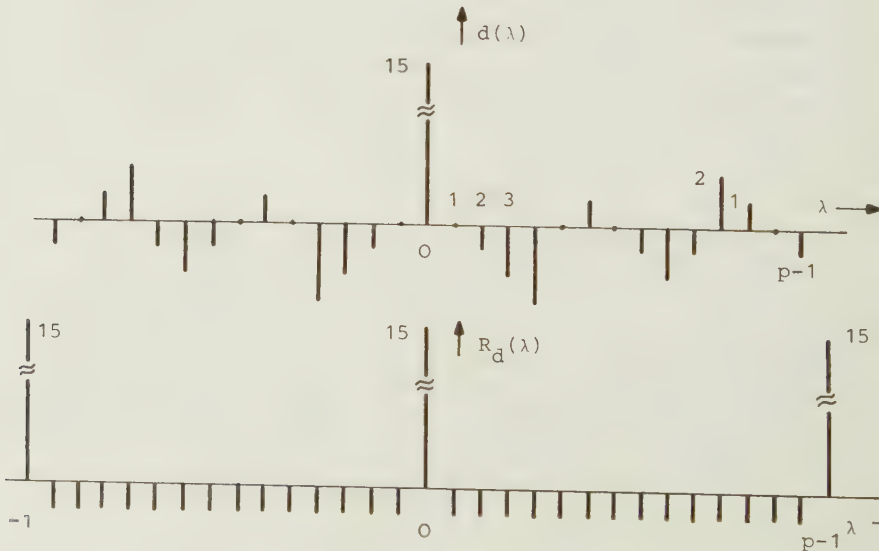


Bild 4.10 Segment-AKF $d(\lambda)$ und periodische AKF $R_d(\lambda)$ für ein $D(z)$ einer $p = 15$ langen PN-Folge

Zu der bekannten AKF $R_{PN}(\tau)$ einer PN-Folge gelangt man sofort, wenn das Kronecker-Symbol $\gamma_0(k)$ der zeitdiskreten Darstellung als Deltafunktion $\delta_0(\tau)$ mit der zugehörigen Bewertung interpretiert wird und folgende Faltungsoperation ausgeführt wird.

$$R_{PN}(\tau) = r(\tau) * r(\tau) * R_d(\tau) \cdot \frac{1}{p \cdot T_c} \quad (4.19)$$

Der Faktor $\frac{1}{p \cdot T_c}$ berücksichtigt dabei den Unterschied von zyklischer und ^cperiodischer Faltung. s.a. [63, Nr. 12].

Zusammenfassend ist also die Darstellung mehrstufiger PN-Folgen eine wesentliche Erweiterung der relativ einfach erzeugbaren Signalklassen $s(t)$ mit Pseudo-Noise-Eigenschaften. Sie besitzen die gleiche AKF wie -1, 1-Folgen, d.h. bezüglich der Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$ und des transformierten Rauscheinflusses sind die im 3. Kapitel entwickelten Diskriminatormodelle nebst den analytischen Beziehungen sofort übernehmbar. Außerdem stellt die größere Verschlüsselungsvielfalt für manche Anwendungen eine interessante Erweiterungsmöglichkeit dar. Bei gleicher AKF wird durch die mögliche Filterung mit rekursiven Allpässen die Verteilungsdichte der auftretenden Amplituden geändert. Dies ist also eine zusätzlich zu der von Davies in [13] u. [14] geschilderten Möglichkeit (dort mit nichtrekursiven Filtern), die Verteilungsdichte von PN-Folgen zu verändern.

Allerdings hat jede minimalphasige Version $s_1(t)$ aus der Klasse der PN-Folge mit Länge p die unangenehme Eigenschaft, daß der größte Teil der Signalenergie eines Segmentes vorwiegend auf wenige Elemente verteilt ist.

Beispielsweise sind bei der 15-Chip minimalphasigen Folge etwa 85% der Gesamtenergie in a_0 enthalten, bei einer -1, 1-Folge hingegen führt jedes Chip die gleiche Signalenergie mit ca. 6,7%. Zwischen diesen beiden Extremsituationen bewegen sich alle anderen erzeugbaren Mehrstufensignale für eine feste Länge p .

Im Prinzip ist es nun auch möglich, mit Transversalfilterstrukturen i.a. mehrstufige Signale $s(t)$ mit einer AKF wie bei der PN-Folge zu generieren, deren Länge $p \notin 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Ausgangspunkt ist eine geeignet zu suchende Segment-AKF $d(\lambda)$, wobei die mit p periodisch fortgesetzte AKF der von PN-Folgen entspricht.

Z-Transformation von $d(\lambda)$, Faktorisierung und Auswahl eines $B_1(z)$ führt dann wie behandelt zu den Folgen $s_k(t)$. Näheres zu dem Syntheseverfahren ist in [36] und [37] in anderem Zusammenhang geschildert.

4.3.3 Entwicklung des Simulationsmodells

Ausgehend von dem im Bild 4.6 gezeigtem Äquivalenzmodell für einen Pseudo-Noise-Generator wird zunächst ein den Korrelator beschreibendes Ersatzsystem entwickelt, welches von PN-Folgen $s(t)$ gespeist wird.

Sämtliche Teilsysteme sind linear- und zeitinvariant, können also innerhalb einer Kaskadenstruktur beliebig vertauscht werden. Bis auf den Allpaßkorrelator lassen sich alle mit analogen Filtern versehene Diskriminatoren durch das nachfolgende Blockschaltbild 4.11 beschreiben.

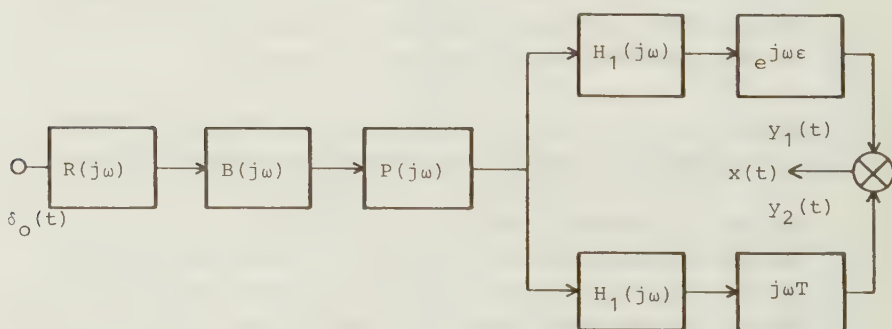


Bild 4.11 Blockschaltbild eines mit PN-Folgen betriebenen Korrelators

Die Verzögerung der gefilterten PN-Folgen zueinander wird durch das System $e^{j\omega\epsilon}$ bewerkstelligt (mit ϵ beliebig positiv oder negativ). Durch andere Aufteilung und Umsortierung der Teilsysteme s. Bild 4.12 läßt sich das Spektrum $X(j\omega)$ analytisch angeben, da die Multiplikation der Zeitsignale $y_{1,2}(t)$ einer Faltung ihrer Fouriertransformierten äquivalent ist.

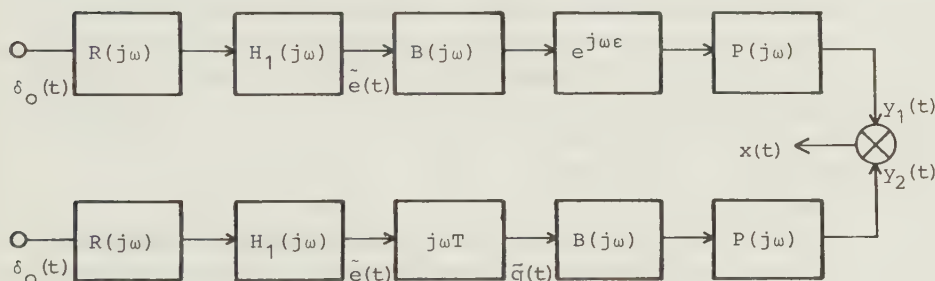


Bild 4.12 Äquivalenzsystem des Korrelators

Für die beiden Teilzweige kann im Frequenzbereich geschrieben werden:

$$Y_1(j\omega) = R \cdot H_1 \cdot B \cdot e^{j\omega\epsilon} \cdot P$$

$$Y_2(j\omega) = R \cdot H_1 \cdot j\omega T \cdot B \cdot P \quad .$$

Durch die Faltungsbeziehung gilt für $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(ju) \cdot Y_1[j(\omega-u)] du \quad .$$

(4.20)

Speziell für einen RC-Korrelator ergibt sich aus der letzten Gleichung mit (4.2), (4.3) und (4.11):

$$X(j\omega) = \frac{T_c^2}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u \frac{T_c}{2}}{u \frac{T_c}{2}} \cdot \frac{j u}{j u + \frac{1}{T}} \cdot \frac{\sum_{\mu=0}^{p-1} a_{\mu} \cdot e^{-j u \mu T_c}}{1 - e^{-j u p T_c}} \cdot e^{j(\omega-u) \varepsilon} \cdot \frac{\sin(\omega-u) \frac{T_c}{2}}{(\omega-u) \frac{T_c}{2}} \cdot \frac{1}{j(\omega-u) + \frac{1}{T}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot e^{-j(\omega-u)v \cdot T_c}}{1 - e^{-j(\omega-u)p \cdot T_c}} d$$

Numerische Auswertung dieser Beziehung bringt wegen der Terme $P(j\omega)$ und $P[j(\omega-u)]$, welche die periodische Wiederholung beschreiben, erhebliche Schwierigkeiten mit sich. Wahl des Integrationsintervalles und der Stützstellenzahl derart, daß für die relativ kurze Folgenlänge von $p = 15$ schon eine Rechenzeit von ca. 30 min (PDP 11/45) entstand, brachte noch keine brauchbaren (d.h. mit Messungen übereinstimmenden) Ergebnisse.

Deswegen wird weiter untersucht, durch welche Möglichkeiten die Systeme $P(j\omega)$ aus der Faltungsintegration separiert werden können. Weiterhin werden, basierend auf dem durch Bild 4.12 gezeigten System Umformung derart vorgenommen, daß ein vorhandenes Simulationsprogramm [19] zur Problemlösung verwendet werden kann.

Zusammenfassung der ersten zwei bzw. 3 Systeme in den Kas-kaden von Bild 4.12 läßt folgende Signale entstehen:

$$\tilde{e}(t) = r(t) * h_1(t) \quad \text{---} \bullet \quad \tilde{E}(j\omega) = R(j\omega) \cdot H_1(j\omega)$$

$$\tilde{q}(t) = T \cdot \frac{d}{dt} \{r(t) * h_1(t)\} = T \cdot \frac{d\tilde{e}(t)}{dt}$$



$$\tilde{Q}(j\omega) = R(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot j\omega T$$

Verschiebung beider Signale um eine halbe Chipbreite in positive t -Richtung führt auf:

$$E(j\omega) = \tilde{E}(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{T_c}{2}}$$

$$Q(j\omega) = \tilde{Q}(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{T_c}{2}}$$

Diese Phasenverschiebung in beiden Zweigen des Korrelators wirkt sich auf $|X(j\omega)|$ nicht aus, ist aber für das Simulationsprogramm erforderlich. Beginnen die Zeitfunktionen $e(t)$ und $q(t)$ mit $t=0$ (Laplace-Beschreibung), so stellt sich bereits nach etwa einem Segment der eingeschwungene Zustand für die zu multiplizierenden Signale $y_{1,2}(t)$ ein.

Ist nun weiterhin ein Wert vor dem Multiplizierer am Segmentende ≈ 0 , so läßt sich das die periodische Wiederholung beschreibende System $P(j\omega)$ von beiden Korrelatorzweigen ersatzweise hinter der Multiplikation anordnen.

Die Bilder 4.13 a und b verdeutlichen dieses Ziel.

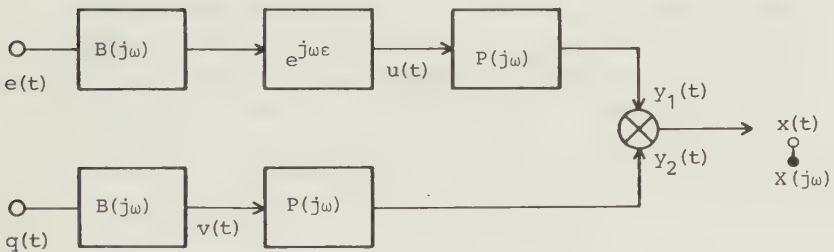


Bild 4.13a Korrelator für exakte Bestimmung von $X(j\omega)$

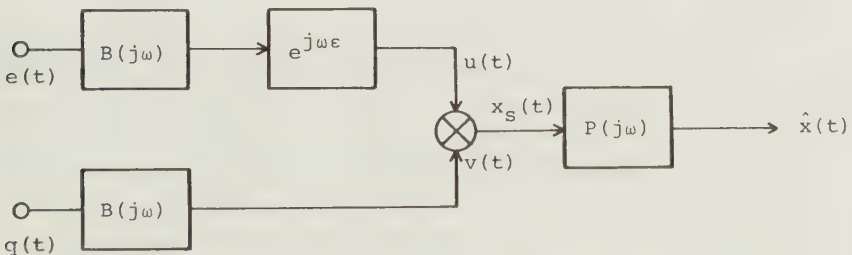


Bild 4.13b Ersatzsystem mit verschobenem Teilblock $P(j\omega)$

Wie leicht zu erkennen ist, sind die beiden letzten Blockschaltbilder bezüglich des Ausgangssignales keinesfalls für alle $B(j\omega)$, $e(t)$, $q(t)$ und Perioden $p \cdot T_C$ (bestimmt durch $P(j\omega)$) äquivalent, da die Multiplikation eine nichtlineare Operation im Sinne der linearen Systemtheorie darstellt. Allerdings läßt sich durch Verschieben der Koeffizienten a_v des Systems $B(j\omega)$ immer erreichen, daß der Block mit n Elementen "1" s. [66] an das Ende eines Segmentes kommt, wodurch dann mindestens eines der beiden Signale $u(t)$ und $v(t)$ genügend nahe auf Null abgeklungen ist. Damit ist in diesem Fall die Quasilinearisierung der Multiplikation in der Form der Verschiebbarkeit des Systems $P(j\omega)$ möglich.

Für das durch Bild 4.13b gezeigte System ergibt sich als Produkt für $\mathcal{F}\{u \cdot v\} = \mathcal{F}\{x_s(t)\}$ ein kontinuierliches Spektrum. Durch das nachfolgende System $P(j\omega)$ findet eine Bewertung der spektralen Hüllkurve statt, und es treten nur noch äquidistante Spektrallinien im Abstand $f = \frac{1}{p \cdot T_C}$ auf. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache wird angenommen, daß $u(t)$ und $v(t)$ Einzelrechteckimpulse seien.

$$u(t) = A \cdot r(t) = A \cdot \text{rect } \frac{t}{T_C}$$

$$v(t) = B \cdot r(t) = B \cdot \text{rect } \frac{t}{T_C} \quad .$$

Nach Bild 4.13a gilt dann für $\epsilon = 0$:

$$y_1(t) = u(t) * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - vp \cdot T_C) = A \cdot r(t) * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - vp \cdot T_C)$$

$$y_2(t) = v(t) * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - vp \cdot T_C) = B \cdot r(t) * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - vp \cdot T_C) \quad .$$

Sofern die Einzelfunktionen u und v abgeklungen sind, bevor durch die periodische Wiederholung $u(t - p \cdot T_C)$ bzw. $v(t - p \cdot T_C)$ einen von Null verschiedenen Wert aufweist, kann geschrieben werden, s. Bild 4.14.

$$x(t) = y_1(t) \cdot y_2(t) = [u(v) \cdot v(t)] * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - vp \cdot T_C) \quad . (4.21)$$

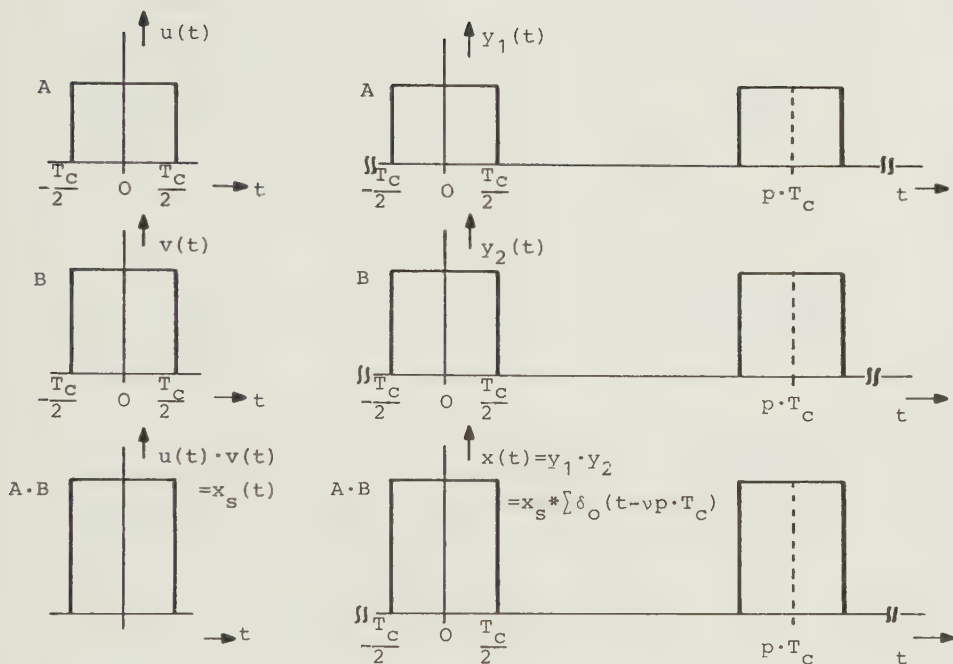


Bild 4.14 Zur Quasilinearisierung der Multiplikation bezüglich des Systems $P(j\omega)$

In dem gezeigten Fall sind die beiden Systeme nach Bild 4.13a und b also identisch. Für eine Verschiebung von beispielsweise $\epsilon = \frac{T_C}{4}$ erhält man bei der graphischen Produktbildung die im Bild 4.15 gezeigten Verhältnisse.

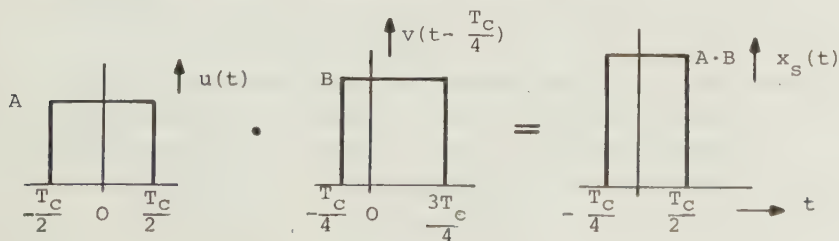


Bild 4.15 Zeitpunkte für $\epsilon = \frac{T_C}{4}$ entsprechend Bild 4.13b

Bei positivem ε gilt für $X_S(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t) \cdot v(t-\varepsilon)\} =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{T_C}{2} + \varepsilon}^{\frac{T_C}{2}} A \cdot B \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot B \cdot T_C \cdot e^{-j\omega \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2} (1 - \frac{\varepsilon}{T_C}) \cdot T_C}{\frac{\omega \cdot T_C}{2}} \\
 &= A \cdot T_C \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_C}{2}}{\omega \frac{T_C}{2}} * [B \cdot T_C \cdot e^{-j\omega \varepsilon} \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_C}{2}}{\omega \frac{T_C}{2}}]
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also wieder eine si-Funktion für den spektralen Verlauf, deren 1. Nullstelle aber jetzt bei

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_C (1 - \frac{\varepsilon}{T_C})}$$

liegt (schmalerer Produktimpuls korrespondiert zu breiterem Spektrum). Bei periodischer Fortsetzung der Einzelsignale u und v berechnet sich das Spektrum zu:

$$\hat{X}(j\omega) = X_S(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_C} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega - k \frac{2\pi}{p \cdot T_C}) \quad (4.22)$$

$$= [U(j\omega) * V(j\omega)] \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_C} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega - k \frac{2\pi}{p \cdot T_C})$$

Im Falle der betrachteten Beispiele mit u und v als Einzelrechtecksignale wird der Schätzwert des Ausgangsspektrums $\hat{X}(j\omega) \equiv X(j\omega)$, d.h. die Bilder 4.13a und b gelten als äquivalent.

Als nächstes erfolgt eine Untersuchung, ob bei den mit analogen Filtern ausgerüsteten Korrelatoren des 3. Kapitels die Zeitsignale $e(t)$ und $q(t)$ genügend schnell abklingen, um Anwendung des quasilinearen Verhaltens der Multiplikation, d.h. Verwendung des Systems nach Bild 4.13b möglich zu machen. Die Allpaßlösung kann mit erfaßt werden, wenn man berücksichtigt, daß hierbei

$$\tilde{e}(t) = r(t) * h_1(t)$$

$$\tilde{q}(t) = r(t) * h_2(t)$$

ist. Die Signale $e(t)$ und $q(t)$ stellen also die Reaktionen der Filter $H_1(j\omega)$ und $H_2(j\omega)$ auf ein Einzelrechteck der Breite T_c dar. Sie sind für die optimierten Korrelatoren im folgenden Bild 4.16 dargestellt.

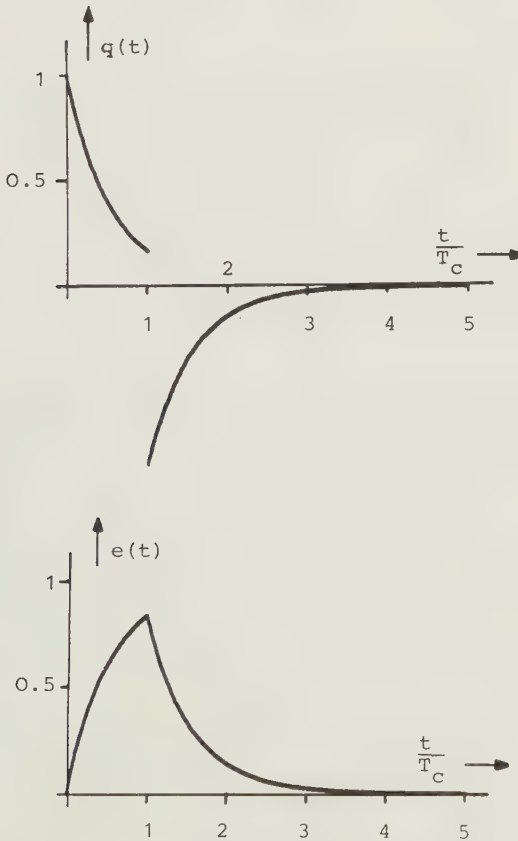


Bild 4.16a

Rechteckantworten
des RC-Systems

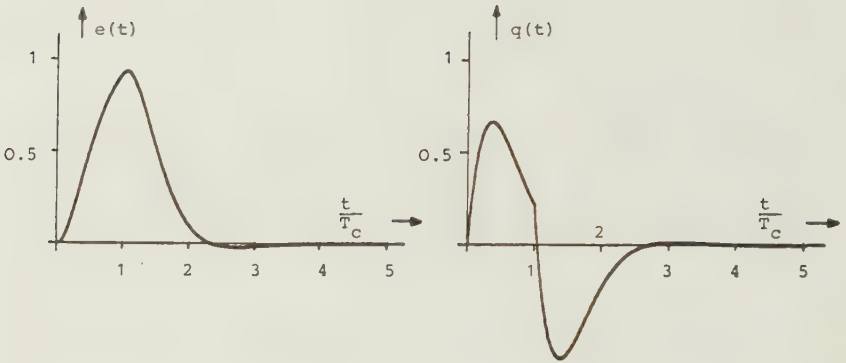


Bild 4.16b Rechteckantworten des RLC-Systems für $\delta = 40^\circ$

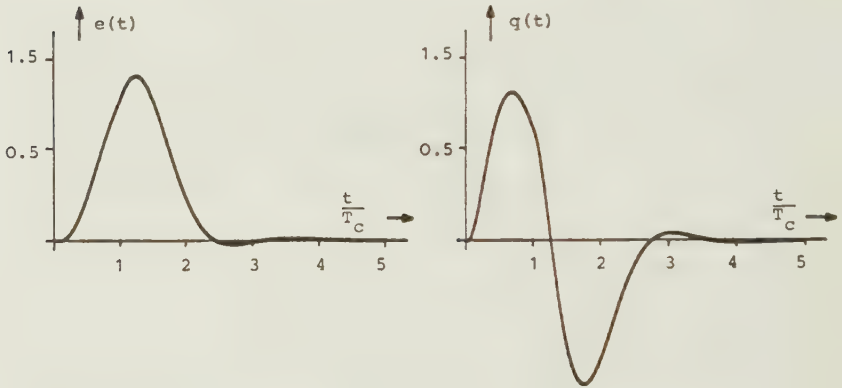


Bild 4.16c Rechteckantworten des Systems mit Impulsform 30.10.10

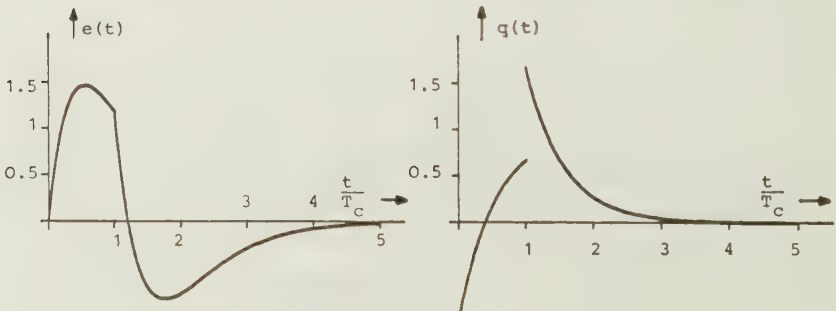


Bild 4.16d Rechteckantworten des Allpaß-Systems mit $e(t)$ als Reaktion des Bandpaßzweiges

Korrelator	RC -	RLC -	Impulsformer	Allpaß
$e(3T_c)$	0,0224	-0,0154	-0,0092	0,2924
$q(3T_c)$	-0,0224	0,0147	0,1022	-0,0743
$e(4T_c)$	0,0037	0,0002	0,0054	0,0447
$q(4T_c)$	-0,0037	0,0012	-0,0253	0,0073

Die vorstehende Tabelle gibt zusätzlich eine quantitative Übersicht der Reaktionen bei 3 bzw. $4 T_c$ bei Erregung mit einem Einheitsrechteck (Amplitude 1). Es ist offensichtlich, daß die Werte e oder q bei Rechteckerregung und folgender Pause mit mindestens 3 Chipbreiten genügend auf Null abgeklungen sind, so daß unter den getroffenen Voraussetzungen (genügend schnelles Abklingen von $u(t)$ oder $v(t)$ am Segmentende) eine Quasilinearisierung der folgenden Multiplikation bezüglich des Systems $P(j\omega)$ möglich wird.

Allerdings sind noch geringe Modifikationen für das Simulationsmodell erforderlich. Damit ein Einzelsegment $u(t)$ und $v(t)$ aus der periodischen eingeschwungenen Folge richtig beschrieben wird, d.h., daß der Einschwinganteil unberücksichtigt bleibt, ist es nötig, die als Erregung dienende NRZ-PN-Folge mit $a_v \in \{-1, 1\}$ um +1 zu verschieben und diese Verschiebung an geeigneter Stelle des Gesamtsystems wieder abzuziehen. Die Verschiebung um +1 ist durch eine Koeffiziententransformation des die PN-Folge generierenden Systems $B(j\omega)$ von $a_v \in \{-1, 1\}$ zu $b_v \in \{0, 1\}$ (Ersetzen der "-1" durch 0) und Verdopplung der Eingangssignale zu erreichen. Statt des Systems $B(j\omega)$ wird jetzt das transformierte System

$$C(j\omega) = \sum_{v=0}^{p-1} b_v e^{-j\omega v T_c}$$

verwendet. Die angesprochene Äquivalenzänderung zeigen die

Bilder 4.17 a und b für den oberen Korrelatorzweig, wobei die Einzelsysteme durch ihre Impulsantworten gekennzeichnet sind.

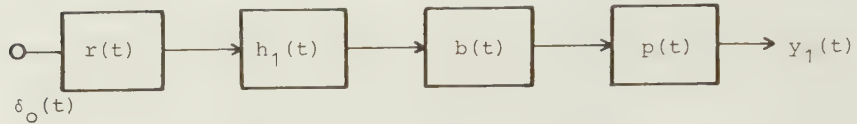


Bild 4.17a Oberer Korrelatorzweig aus Bild 4.12 ohne Verzögerungsglied $e^{-j\omega\epsilon}$

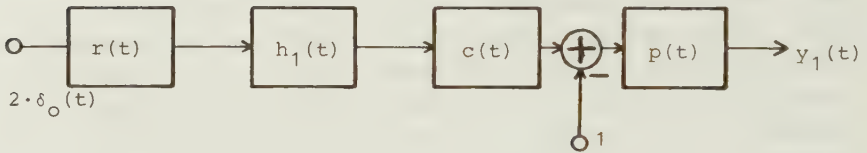


Bild 4.17b Äquivalenter Korrelatorzweig mit $c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(j\omega)\}$

Werden nun die transformierten Koeffizienten b_v so gelegt, daß der $(n-1)$ lange Block von "0"-Elementen [66] am Segmentende vorkommt, so lassen sich für PN-Folgen mit $p > 15$ und Verschiebungen um $\pm \epsilon/2$ Simulationsmodelle mit hinter der Multiplikation angeordnetem System $P(j\omega)$ angeben, die das gewünschte Spektrum $\hat{X}(j\omega)$, von dem nur der Betrag interessiert, genügend genau bestimmbar machen. Bei größeren Folgenlängen können die Verschiebungen ϵ noch größer gewählt werden.

Den Übergang vom Segmentspektrum $X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\}$ (kontinuierlich) zum Linienspektrum $\hat{X}(j\omega)$, s. Bild 4.13b, kann man durch geeignete Wahl des Integrationsintervalles und der Stützstellenzahl bei der numerischen Faltungsintegration automatisch erhalten. Werden Werte im äquidistanten Abstand $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_c}$ mit $k = 0, (1), k_{\max}$ berechnet, so entsprechen

diese genau den nur tatsächlich vorhandenen Spektrallinien, die Zwischenwerte sind nicht relevant. Das Simulationsmodell gibt ebenso wie die Messung am realen Modell nur das Amplitudenspektrum, nicht das Fourierspektrum wieder. Das Fourierspektrum wird dann durch Wichtung der Amplitudenwerte mit $\delta_0(\omega)$ -Impulsen erhalten.

Zur Simulation mit SIMPRO für die PDP 11/45-Rechenanlage ergibt sich bei Verwendung des RC-Filterpaares als Korrelatornetzwerk das in Bild 4.18 gezeigte Blockschaltbild.

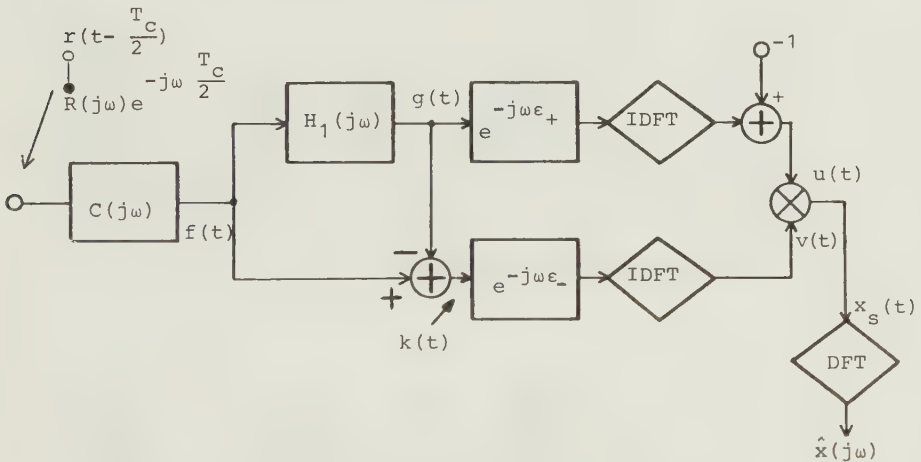


Bild 4.18 Blockschaltbild zur Simulation des RC-Korrelators

Die Differentiation im unteren Korrelatorzweig wird durch die Subtraktion von $k(t) = f(t) - g(t)$ erreicht, wie folgend im Frequenzbereich gezeigt wird.

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}} \quad \text{RC-Tiefpaß}$$

$$G(j\omega) = F(j\omega) \cdot H_1(j\omega)$$

$$K(j\omega) = F(j\omega) - G(j\omega) = F(j\omega) \cdot [1 - H_1(j\omega)]$$

$$= F(j\omega) \cdot \left[1 - \frac{1/T}{j\omega + \frac{1}{T}} \right] = F(j\omega) \cdot \left[\frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{T}} \right]$$

$$= F(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

$$\text{mit} \quad H_2(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{T}} = j\omega \cdot T \cdot H_1(j\omega) \quad \text{RC-Hochpaß} \quad .$$

Transformationen aus dem Frequenz- in den Zeitbereich werden durch IDFT (Inverse diskrete Fouriertransformation), in umgekehrter Richtung durch DFT (Diskrete Fouriertransformation) bezeichnet. Um Verschiebungen ϵ in positiver und negativer Richtung in den Signalzweigen des Korrelators zu ermöglichen, sind zwei Verzögerungsblöcke vorgesehen. Für eine Stützstellenzahl von $N = 512$ entsprechend $k_{\max} = \frac{N}{2} = 256$ Werte für den positiven Frequenzbereich zeigen die folgenden Bilder 4.19 a bis g die dem Bild 4.18 zugeordneten simulierten Signale für $\epsilon = 0$ bei einer Folgenlänge von $p = 15$.

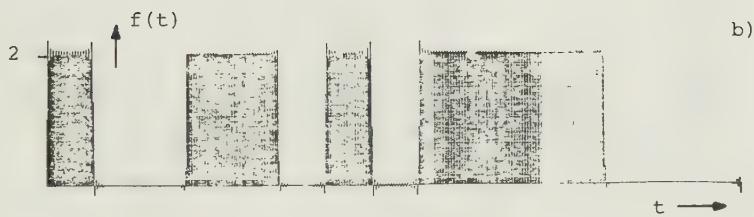
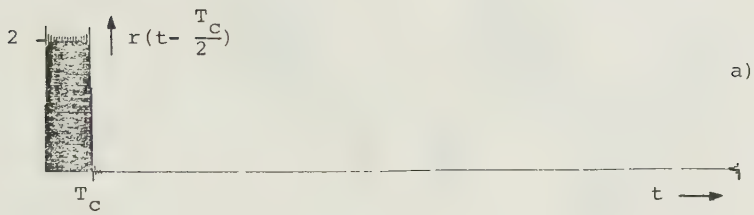


Bild 4.19 Simulationsergebnisse: $\varepsilon = 0$, $p = 15$.

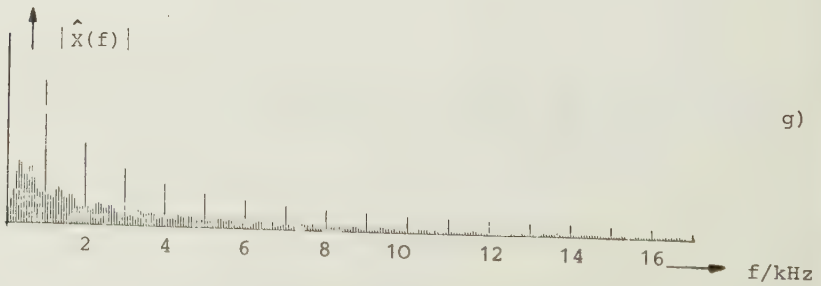


Bild 4.19 Simulationsergebnisse: $\epsilon = 0$, $p = 15$.

4.3.4 Vergleich von Simulation und Messung

Für eine PN-Folge der Länge $p = 15$ wurden die durch Simulation gewonnenen Ergebnisse des optimierten RC-Korrelators für $\epsilon = 0, \pm 0,5 T_C$ und $\pm 1 T_C$ mit entsprechenden Modellmessungen verglichen. Dabei diente der etwas abgewandelte Aufbau nach Bild 3.25 als Basis. Die dort dargestellten PN-Generatoren 1 und 2 wurden nun extern von zwei Funktionsgeneratoren getaktet, die wiederum durch einen PLL miteinander synchronisiert waren. Dadurch wurden Verschiebungen der Taktfrequenzen um $|\epsilon| \leq 0,5 T_C$ einstellbar. Größere Verzögerungen konnten durch am Generator 1 veränderbare ganzzahlige Verschiebungen der generierten Folge um $\pm T_C$ erreicht werden.

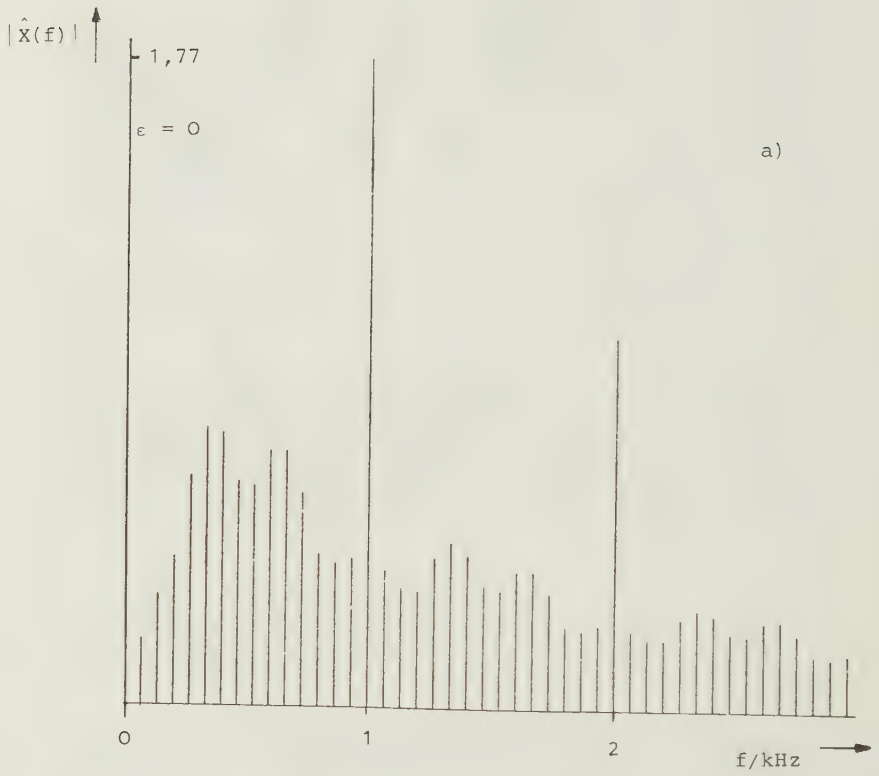
Die Meßbandbreite des Spektralanalysators betrug $B = 3 \text{ Hz}$, der Durchlauf des erfaßten Frequenzbandes von 0 bis 2 kHz bei einer Taktfrequenz von $f_C = \frac{1}{T_C} = 1 \text{ kHz}$ dauerte etwa 500 sec. Dadurch ergab sich eine Verweilzeit innerhalb der Filterbandbreite von etwa der vierfachen Einschwingzeit.

Bei der Simulation wurde eine Stützstellenzahl von $N = 512$ verwendet. Damit diente für die Faltungsintegration das begrenzte Band von $-f_g \leq f \leq f_g$ mit $f_g = \frac{256 \cdot 1 \text{ kHz}}{15} = 17,07 \text{ kHz}$.

In den Bildern 4.20 a bis c sind die Simulationsergebnisse dargestellt, während die Bilder 4.21a bis c die entsprechenden Meßergebnisse zeigen.

In den Bildern 4.22a bis c sind beide Ergebnisse verglichen. Die gestrichelten Spektrallinien korrespondieren mit den Messungen.

Bei den Meßergebnissen fehlt jeweils der Wert des Spektrums für $\omega = 0$, bedingt durch die von Null verschiedene untere Grenzfrequenz des Spektralanalysators. Deswegen wird beim Vergleich mit den Simulationsergebnissen (s. Bild 4.22 die erste Spektrallinie, welche den Wert der Diskriminatorkennlinie $A(\epsilon)$ darstellt, weggelassen. Von den weiteren zahlreich bestimmten Spektralverläufen $\hat{X}(j\omega)$ für verschiedene ϵ , die hier aus Platzgründen nicht aufgeführt werden, erfolgt dann ein spezieller Vergleich der Werte $\hat{X}(j0)$ mit den nach Gl. (3.19) errechneten Werten für $A(\epsilon)$.



a)

Bild 4.20a Simulationsergebnisse

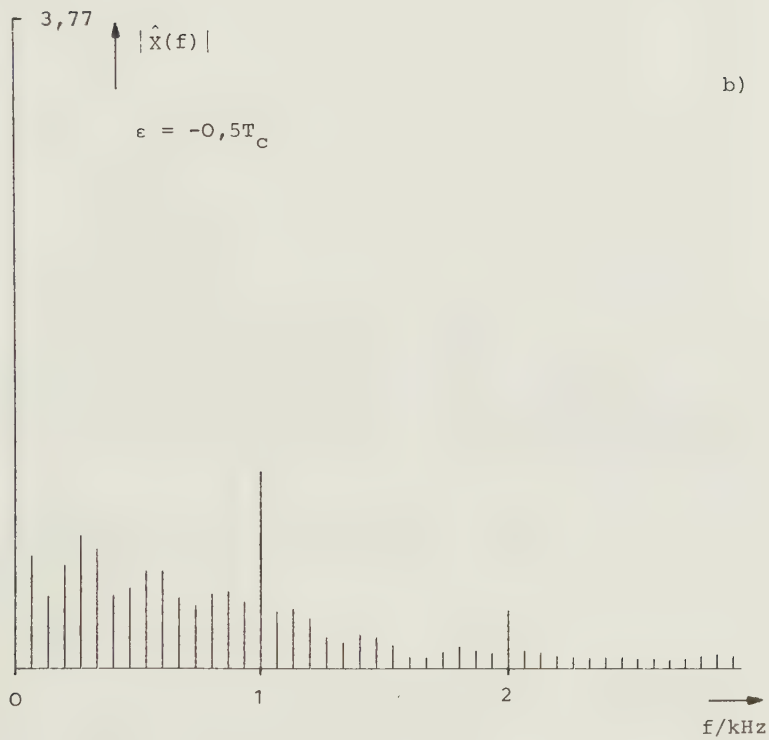


Bild 4.20b Simulationsergebnisse

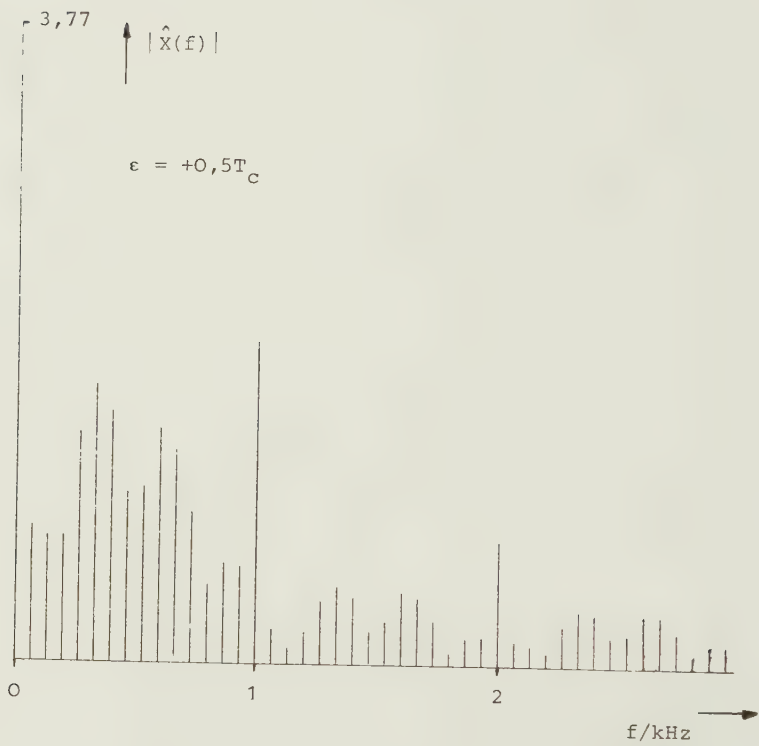


Bild 4.20c Simulationsergebnisse

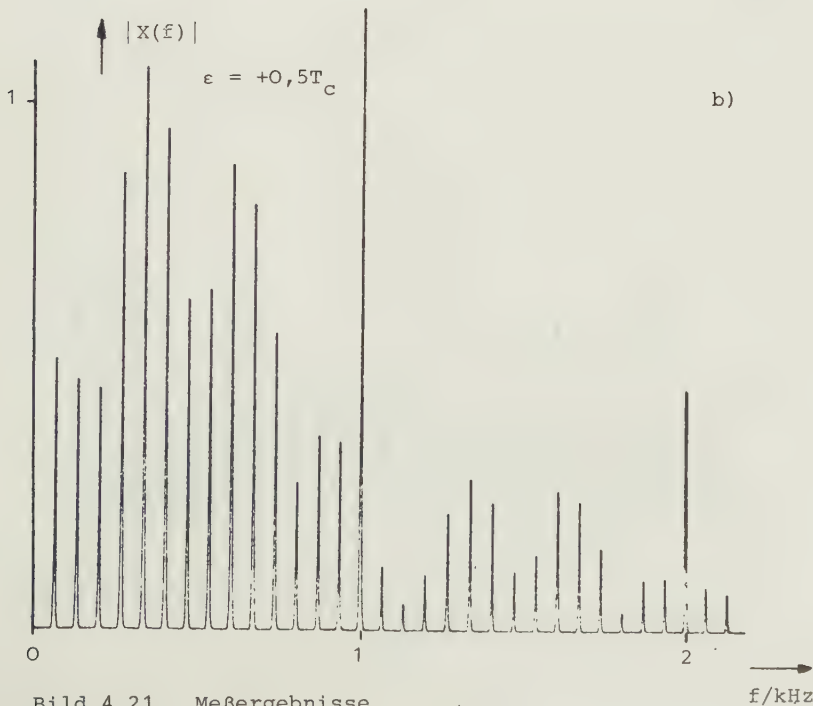
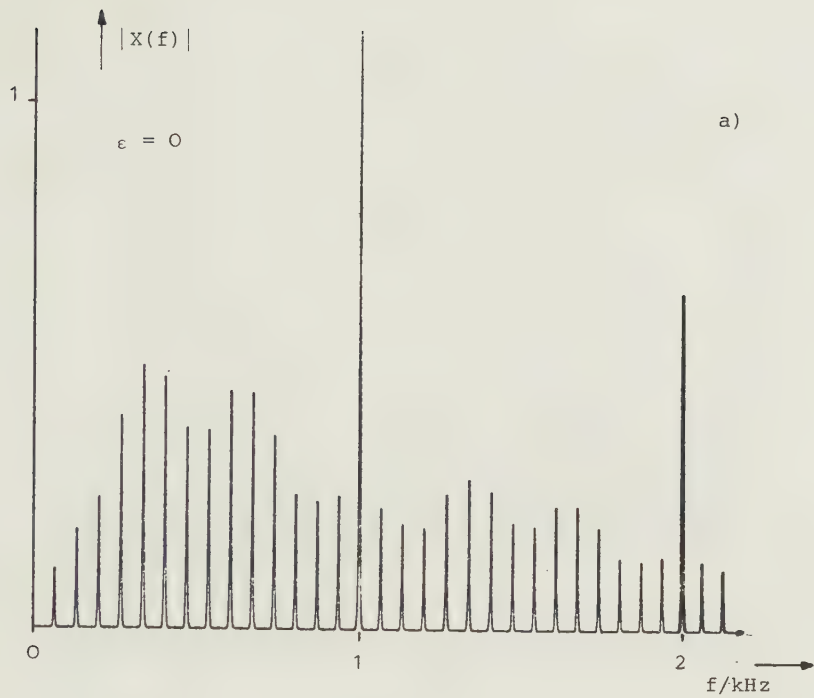
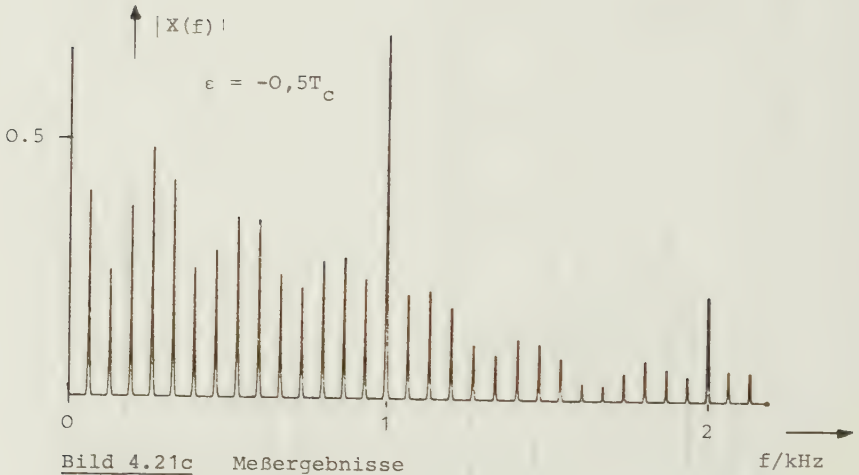


Bild 4.21 Meßergebnisse



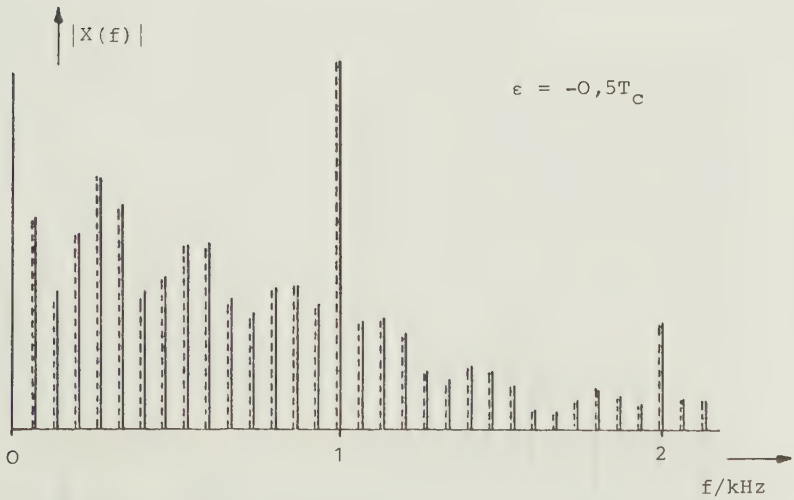
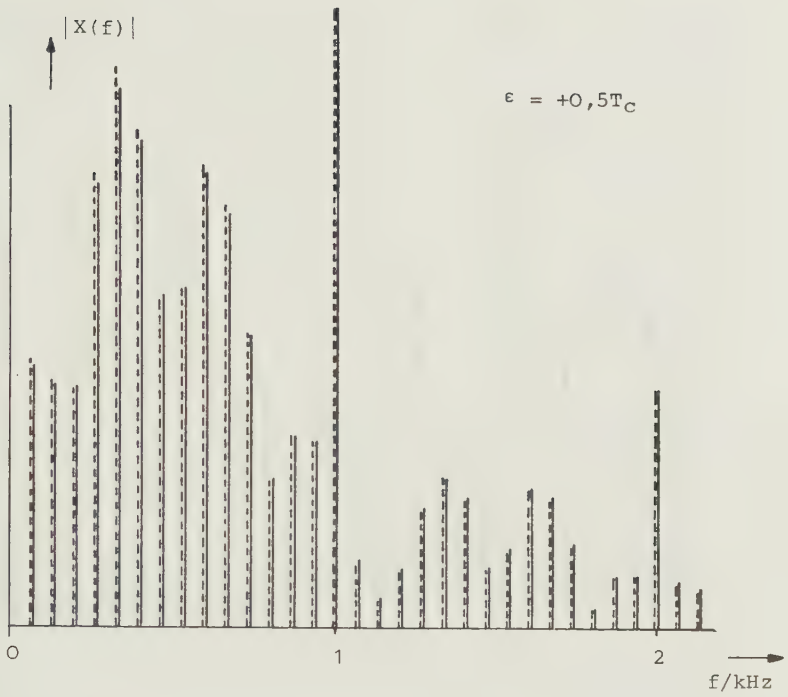
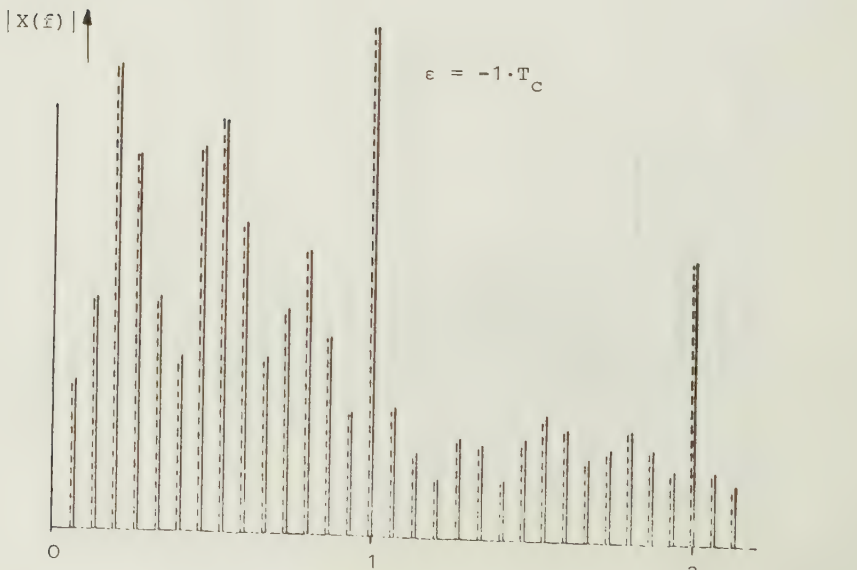
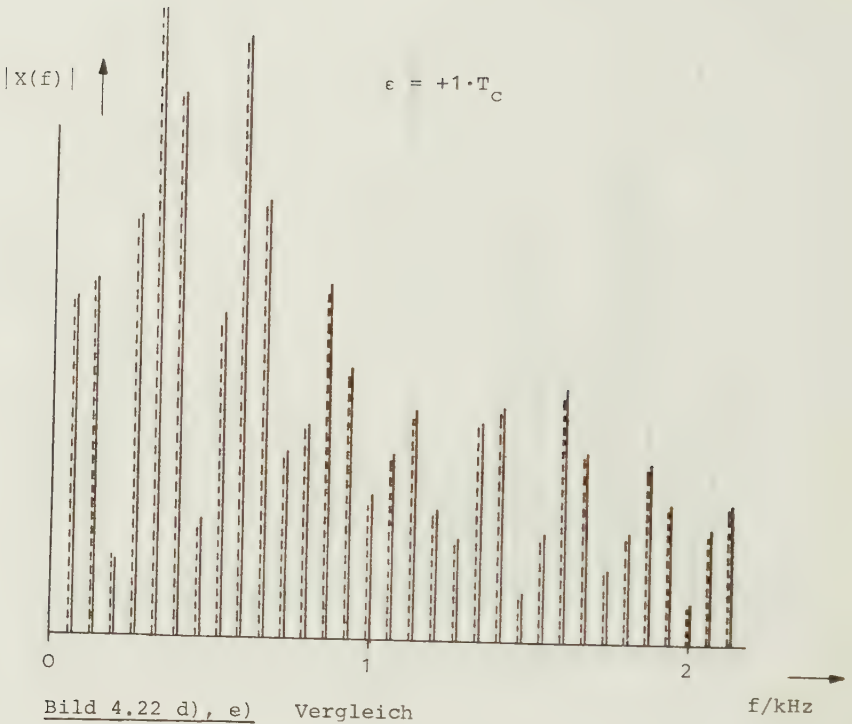


Bild 4.22b), c) Vergleich



Die Vergleichsdarstellungen zeigen, daß die Simulationsergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen aufweisen. Selbst bei der relativ großen Verschiebung von $|\epsilon| = 1$, s. Bilder 4.22 d und e zeigen sich noch keine nennenswerten Abweichungen, obwohl bei diesem Fall die Bedingung, daß mindestens ein Wert u oder v am Segmentende $\approx \text{Null}$ sein muß, schon verletzt wird [$e(3T_C) \approx 2,2\%$ vom Maximalwert]. Halbierung der Stützstellenzahl auf $N = 256$ entsprechend $f_g \approx 8 \text{ kHz}$ bei der Faltung brachte keine nennenswerte Verschlechterung der Ergebnisse.

Vergleich der durch Simulation gewonnenen Gleichstromwerte $\hat{X}(j0)$ mit den exakt berechenbaren Werten nach Gl. (3.19) im Bereich $0 \leq \epsilon \leq 1,5 T_C$ führte auf eine maximale Abweichung von $0,08\%$.

Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der durch das Simulationsmodell gewonnenen Ergebnisse mit der Theorie. Bemerkenswert ist, daß bei sämtlichen Verschiebungen ϵ eine starke Unsymmetrie des Spektrums für Werte bei positivem ϵ gegenüber solchen bei negativen ϵ existiert. Grundsätzlich sind alle Spektralwerte außer dem Gleichwert bei negativen ϵ kleiner als bei positiven Verschiebungen. Diese Tatsache ist von Bedeutung für die Konzipierung des DLL beim Einlaufvorgang, bei dem der SGO-Taktgenerator noch eine Differenz von der Taktfrequenz im gerasteten Zustand aufweisen muß (Suchvorgang). Je nach Anordnung der Filter H_1 und H_2 im Diskriminator ist dann die Freilauffrequenz so zu wählen, daß das Einlaufen von der Seite mit negativen ϵ erfolgt, wodurch das Summenstörpektrum vor dem Synchronisieren klein gehalten wird. Für den Bereich $-T_C \leq \epsilon \leq 0$ stellt die Spektrallinie bei der Taktfrequenz $f_c = \frac{1}{T}$ die größte Störkomponente dar. Durch den noch zu schließenden Regelkreis werden allerdings im Bereich der Rauschbandbreite nur einige der Spektralwerte um 0 herum eine Störwirkung hervorrufen. Die nachfolgende Tabelle gibt die relative Größe der ersten drei Werte bezogen auf den Gleichanteil für das Simulationsmodell mit RC-Filterkorrelator und PN-Folgen mit $p = 15$ an. Dabei finden nur die Spektren $|\hat{X}(j\omega)|$ für negative ϵ Berücksichtigung.

$-\epsilon/T_C$	$ X(0) = A_p(\epsilon) \stackrel{!}{=} 1$	$ \hat{X}(\frac{2\pi}{15 \cdot T_C}) $	$ \hat{X}(\frac{4\pi}{15 \cdot T_C}) $	$ \hat{X}(\frac{6\pi}{15 \cdot T_C}) $
0	/	Bezug 1 $\rightarrow$	1,68	2,24
0,1	1	0,23	0,24	0,28
0,2	1	0,20	0,17	0,18
0,3	1	0,20	0,15	0,16
0,4	1	0,18	0,13	0,16
0,5	1	0,17	0,11	0,16
0,6	1	0,16	0,09	0,17
0,7	1	0,14	0,05	0,19
0,8	1	0,12	0,02	0,24
0,9	1	0,11	0,10	0,31
1	1	0,15	0,23	0,45

Prinzipiell ist das vorgestellte Simulationsmodell nicht nur auf die Verwendung von kurzen PN-Folgen beschränkt. Mit steigender Folgenlänge p ist allerdings eine höhere Stützstellenzahl N erforderlich, wodurch der Speicherplatzbedarf und die Rechenzeit steigt. Für das vorgestellte Beispiel ergaben sich für $N = 512$ Rechenzeiten pro Spektrum $\hat{X}(j\omega)$ von ca. 2 Minuten.

Um die Allgemeingültigkeit des entwickelten Simulationsmodells weiter zu verdeutlichen, wurde der optimale RLC-Korrelator untersucht und mit einigen Messungen verglichen. Hier diente eine PN-Folge der Länge $p = 63$ als Basissignal. Die Stützstellenzahl ergab sich mit $N = 1024$ als ausreichend.

Bei der Verwendung allgemeiner Filterpaare H_1 und H_2 ist eine geringfügige Änderung des in Bild 4.18 gezeigten Blockschaltbildes erforderlich. Die Signale $g(t)$ und $k(t)$ werden dann wie im folgenden Bild 4.23 gezeigt, erzeugt.

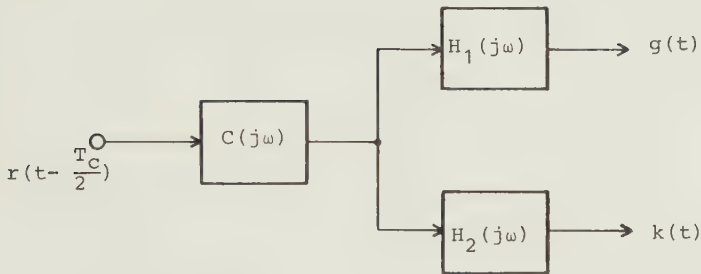


Bild 4.23 Erster Teil des Blockschaltbildes zur Simulation mit beliebigen Filterpaaren H_1 und H_2

Von den durch Simulation erhaltenen Spektren $|\hat{X}(j\omega)|$ werden hier nur die Darstellungen für vier Werte ϵ wiedergegeben. Sie sind in den Bildern 4.24a bis d präsentiert.

Zum Vergleich zeigen die Bilder 4.25a bis c die am Modell gemessenen Spektralverläufe.

In Bild 4.26 ist die Messung für einen mit Impulsformer des Typs 30.10.10 als Basisfilter ausgerüsteten Korrelators für $\epsilon = 0$ aufgeführt. Auf den Impulsformer-Korrelator wird hier allerdings nicht näher eingegangen. Ebenso bleibt aus Gründen zu großen Umfanges der Allpaßkorrelator außer Betracht, obwohl dieser Typ, wie im 3. Kapitel gezeigt, den interessantesten Diskriminatortyp mit analogen Filtern darstellt. Es erfolgt nur ein meßtechnischer Vergleich von Allpaß- und RC-Modell.

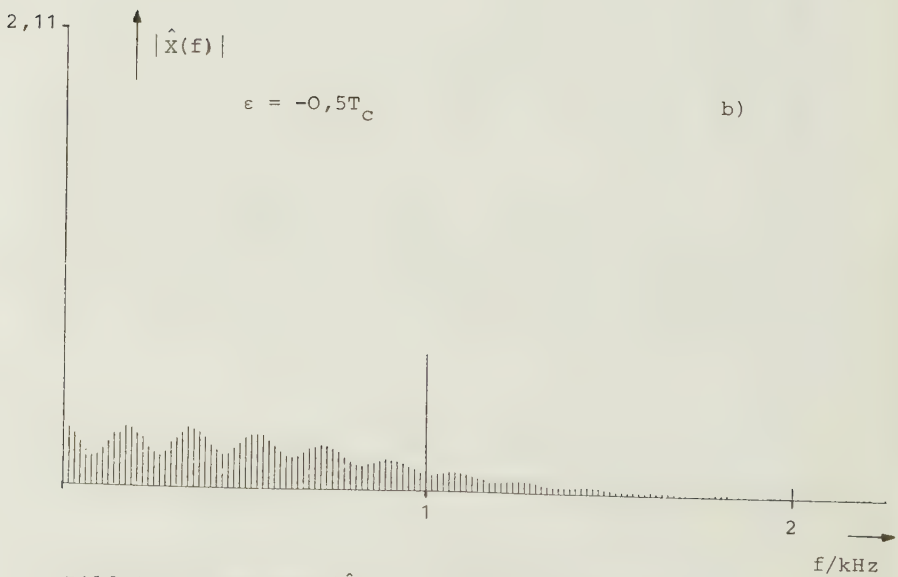
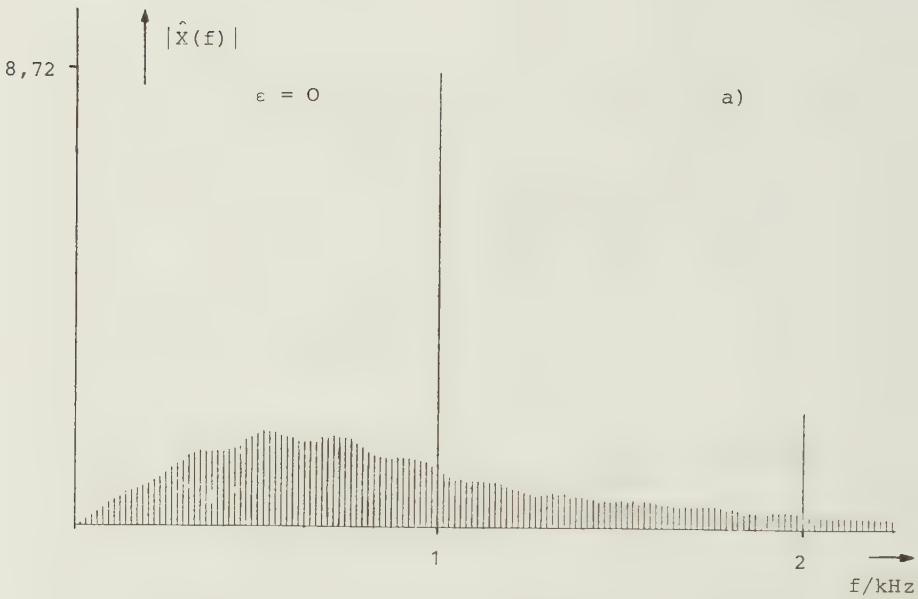


Bild 4.24 Spektren $|\hat{X}(j\omega)|$ für RLC-Korrelator

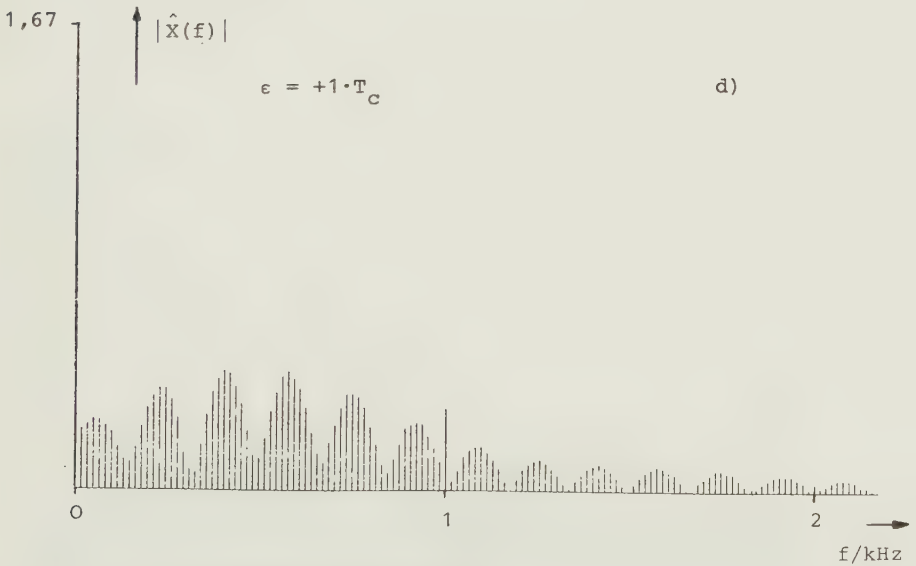
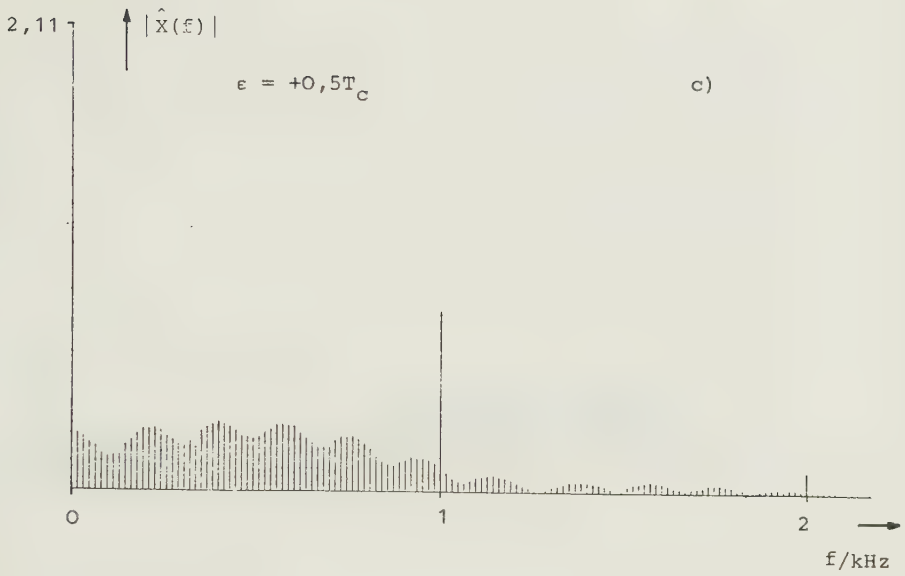


Bild 4.24 Spektren $|\hat{X}(j\omega)|$ für RLC-Korrelator

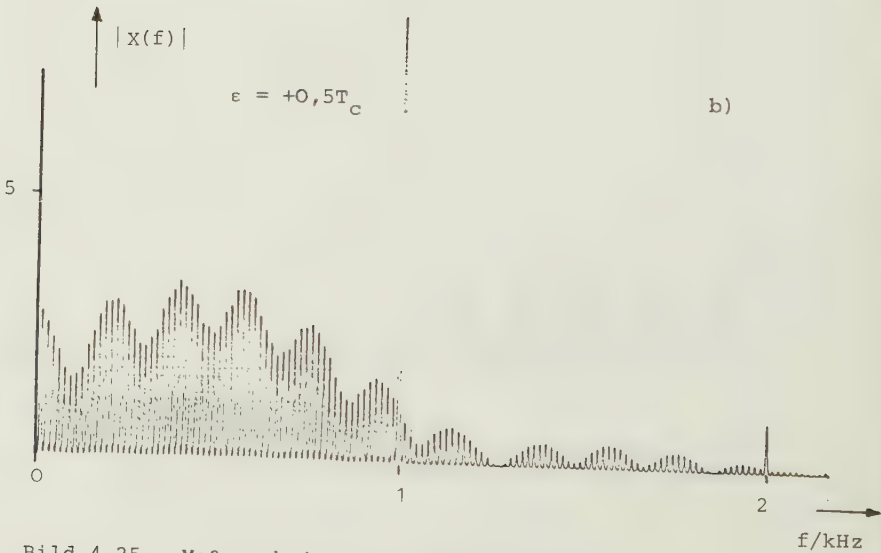
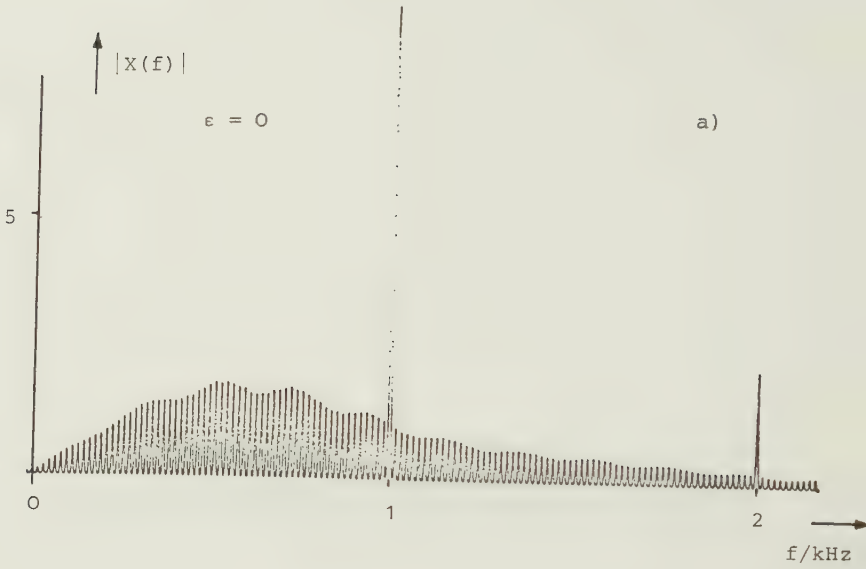


Bild 4.25 Meßergebnisse für RLC-Korrelator

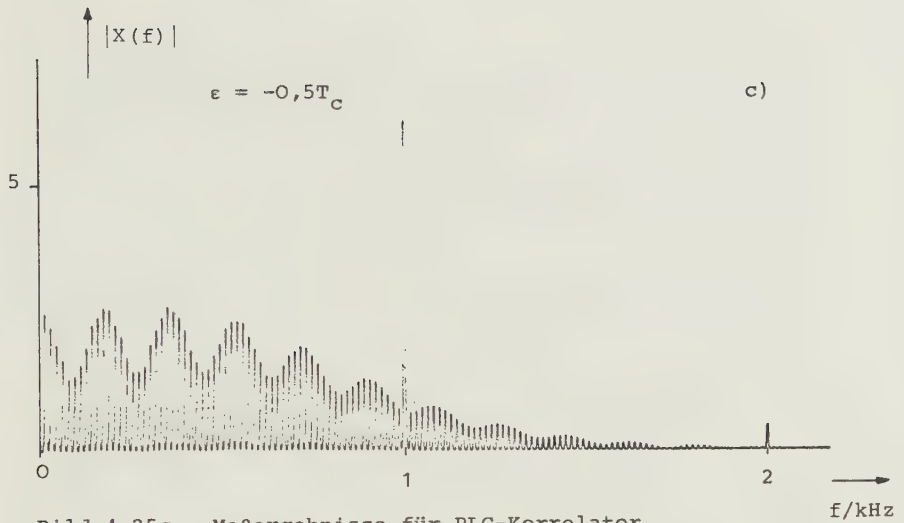


Bild 4.25c Meßergebnisse für RLC-Korrelator

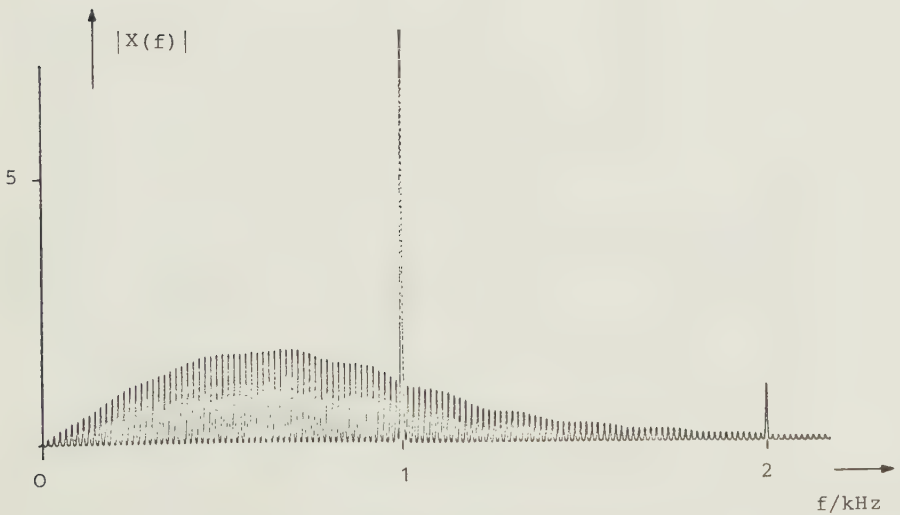


Bild 4.26 Messung mit Impulsformer-Korrelator für $\epsilon = 0$

Von den nicht dargestellten Spektren werden die Gleichanteile $X(0)$ mit den durch Gl. (3.26) bestimmbaren Werten für die Regelkennlinie des RLC-Korrelators verglichen.

Dabei wird näherungsweise davon ausgegangen, daß die AKF der verwendeten Folge mit $p = 63$ gleich der AKF einer Zufallsfolge ist (Voraussetzung zur Berechnung von Gl. (3.26)). Die rechnerisch ermittelten Werte liegen um ca. 1,5% unter den Simulationsergebnissen.

Diese konstante Ablage der durch Simulation erhaltenen Werte ist dadurch erklärbar, daß die AKF der PN-Folge mit $p = 63$ im Bereich $T_C \leq \tau \leq (p-1)T_C$ doch noch einen "Restwert" von $\frac{1}{p} = \frac{1}{63} \hat{=} 1,59\%$ hat, was zur Erhöhung der Diskriminatorkennlinie beiträgt, wie im 3. Kapitel speziell durch Bild 3.9 (dort für den RC-Korrelator) gezeigt wurde. Weiterhin werden die Werte der ersten 3 Spektrallinien im Verhältnis zur Nutzkomponente $X(0) = A(\epsilon)$ tabellarisch aufgeführt.

$-\epsilon/T_C$	$A(\epsilon) \hat{=} 1$	$ \hat{X}_1 $	$ \hat{X}_2 $	$ \hat{X}_3 $
0	/	Bezug 1 $\rightarrow$	2,17	3,30
0,1	1	0,13	0,12	0,11
0,2	1	0,13	0,12	0,11
0,3	1	0,13	0,12	0,11
0,4	1	0,12	0,11	0,10
0,5	1	0,12	0,11	0,10
0,6	1	0,12	0,11	0,09
0,7	1	0,12	0,11	0,08
0,8	1	0,12	0,11	0,08
0,9	1	0,12	0,11	0,08
1	1	0,12	0,11	0,10

Diese Werte sind, da eine andere Folgenlänge p verwendet wurde, nicht direkt mit der Tabelle für den RC-Korrelator-typ vergleichbar, obwohl zu erwarten wäre, daß sich ein Diskriminatortyp mit höhergradigen Filtern günstiger bezüg-

lich des entstehenden Störspektrums verhält, als der Korrelator mit Filtern 1. Grades. Um einen direkten Vergleich möglich zu machen, sind in der nächsten Tabelle die entsprechenden Werte für einen mit RLC-Filtern ausgerüsteten Korrelator aufgeführt, bei dem die Folgenlänge $p = 15$ betrug.

Auch beim RLC-System sind die Spektren für positive und negative ϵ verschieden hoch, allerdings ist hier die Unsymmetrie nicht mehr so stark ausgeprägt, s. Bild 4.24 b) und c). Aber auch hier liegen die Spektralwerte für negative Verschiebungen ϵ niedriger, also günstiger.

$-\epsilon/T_C$	$A(\epsilon) \stackrel{!}{=} 1$	$ \hat{X}_1 $	$ \hat{X}_2 $	$ \hat{X}_3 $
0	/	Bezug 1	2,11	3,15
0,1	1	0,24	0,25	0,35
0,2	1	0,23	0,19	0,25
0,3	1	0,23	0,18	0,22
0,4	1	0,22	0,16	0,21
0,5	1	0,21	0,14	0,20
0,6	1	0,20	0,11	0,20
0,7	1	0,19	0,07	0,21
0,8	1	0,17	0,05	0,24
0,9	1	0,17	0,11	0,3

Werden nun vergleichsweise diese 3 Spektrallinien des RLC-Korrelators auf die korrespondierenden Werte des RC-Systems bezogen, so ergibt sich folgendes Bild:

$-\epsilon/T_C$	$\frac{ X_1 _{RLC}}{ X_1 _{RC}}$	$\frac{ X_2 _{RLC}}{ X_2 _{RC}}$	$\frac{ X_3 _{RLC}}{ X_3 _{RC}}$
0,1	1,043	1,042	1,25
0,2	1,15	1,118	1,389
0,3	1,15	1,20	1,375
0,4	1,222	1,231	1,313
0,5	1,235	1,273	1,25
0,6	1,25	1,222	1,176
0,7	1,357	1,40	1,105
0,8	1,417	2,5	1,0
0,9	1,545	1,10	0,968

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Maximum der Regelkennlinie $A(\epsilon)$ beim RLC-System etwa 39,5% größer ist als beim RC-Typ und die Steigung der RLC-Kennlinie etwa 10,5% über der des RC-Systems liegt, kann, abhängig von der Rauschbandbreite des geschlossenen Kreises, das System 2. Ordnung (RLC-Typ) vorteilhafter bezüglich des Störeinflusses sein, als der RC-Korrelator. Die spektralen Störwerte für $|\epsilon| > 0,6 T_c$ spielen bezüglich eines Vergleiches keine so große Rolle mehr, denn das Synchronisieren des geschlossenen Kreises erfolgt erst nach Erreichen des Maximums der Regelkennlinie beim Suchbetrieb, und die Kennlinien für Systeme höherer Ordnung als 1 fallen nach dem Erreichen von $\max\{A(\epsilon)\}$ schneller ab, s. Bilder 3.17 und 3.26.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde auf die Unsymmetrie des spektralen Verlaufes bei gleichgroßen positiven und negativen Verschiebungen hingewiesen. Es ergaben sich immer für negative ϵ die kleineren spektralen Störwerte. Nur diese wurden für den Vergleich verschiedener Modelle herangezogen. In der schon erwähnten Untersuchung von Frank [20] für lange PN-Folgen wurden die gleichen Unsymmetrien festgestellt. Allerdings liegen hier die kleineren Störwerte bei positiven Verschiebungen ϵ (dort $\emptyset$ genannt) was durch eine Vertauschung von Empfangs- und Referenzzweig bedingt ist ([20], S. 49, Abb.2.28).

4.3.5 Meßtechnischer Vergleich von RC- und Allpaßkorrelator

Bei der Bestimmung des Störeinflusses durch weißes Rauschen im Empfangszweig wurde bereits festgestellt, daß der Allpaß-Korrelator mit Rauscheinwirkung auf den Bandpaßzweig günstigeres Verhalten bezüglich des transformierten Rauschens hat als ein RC-Korrelator mit einer konstanten Verstärkung von 4 in einem Diskriminatorzweig.

Um nun einen Vergleich für das am Multipliziererausgang wirkende Störspektrum in Abwesenheit des Empfangsrauschens vornehmen zu können, wurden Messungen mit beiden Korrelator-typen für verschiedene Verschiebungen ϵ von Empfangs- und

Referenz-PN-Folge durchgeführt. Dabei diente wieder eine PN-Folge der Länge $p = 15$ als Basissignal. Der RC-Korrektor besaß im Hochpaßzweig eine zusätzliche konstante Verstärkung von $+4$, wodurch ein direkter Vergleich der gemessenen Störspektren möglich war.

Bei einer Taktfrequenz der PN-Generatoren von $f_C = \frac{1}{T} = 1 \text{ kHz}$ und einer Meßbandbreite des Spektralanalysators $B = 3 \text{ Hz}$ betrug der in ca. $8 \frac{1}{2} \text{ min}$ erfaßte Frequenzbereich $2,1 \text{ kHz}$, da nur in diesem Frequenzband die wesentlichen Störspektrallinien liegen.

Die folgenden Bilder stellen jeweils die Störspektren von RC und Allpaßmodell für gleiche Verschiebung ϵ gegenüber. Auch beim Allpaßkorrelator sind die Werte der Spektren für negative ϵ kleiner als für die entsprechenden positiven ϵ .

Für einen quantitativen Vergleich der beiden Korrelatortypen werden hier die ersten vier Störspektrallinien für verschiedene negative ϵ miteinander verglichen und zwar auf die Werte des RC-Korrektors normiert.

Außerdem ist in der letzten Spalte das Verhältnis der Taktfrequenzlinien bei $f_C = \frac{1}{T_C}$ aufgeführt.

$-\epsilon/T_C$	$\frac{ X_1 _{\text{Allp}}}{ X_1 _{\text{RC}}}$	$\frac{ X_2 _{\text{Allp}}}{ X_2 _{\text{RC}}}$	$\frac{ X_3 _{\text{Allp}}}{ X_3 _{\text{RC}}}$	$\frac{ X_4 _{\text{Allp}}}{ X_4 _{\text{RC}}}$	$\frac{ X_{\text{Takt}} _{\text{Allp}}}{ X_{\text{Takt}} _{\text{RC}}}$
0	1,25	1	1,16	1,42	0,66
0,2	1,07	1,08	0,50	1,13	1,75
0,4	1,05	1,11	0,27	0,66	1,72
0,5	1,07	1,22	0,35	0,56	1,15
0,6	1,10	1,45	0,49	0,52	0,85
0,8	1,31	1,85	0,71	0,46	0,57
1	1,40	0,77	0,83	0,46	0,46

Für sehr kleine Rauschbandbreiten (nur etwa X_1 im Durchlaßbereich des Frequenzganges vom geschlossenen Kreis) ist also die RC-Korrektoranordnung günstiger als ein mit Allpässen ausgerüsteter Diskriminator. Bei steigender Rauschbandbreite hingegen wird man besser die Allpaßkonfiguration

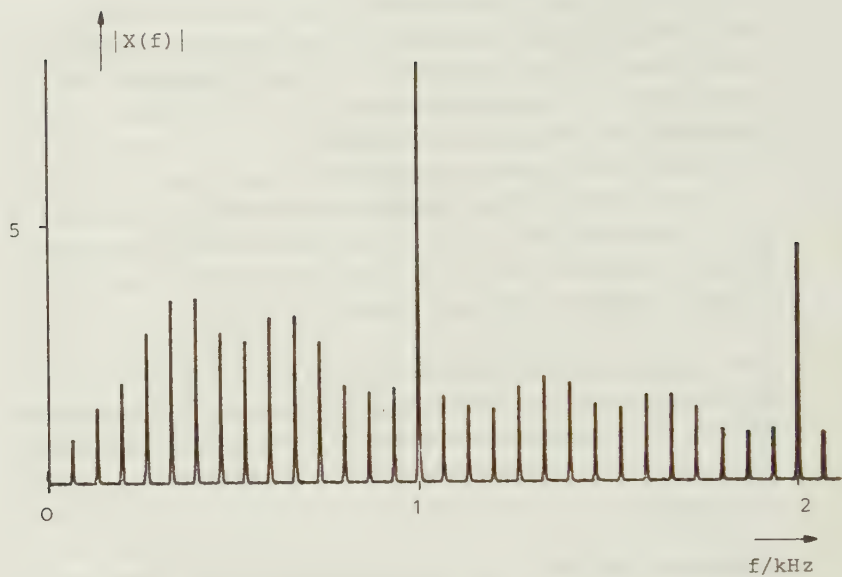
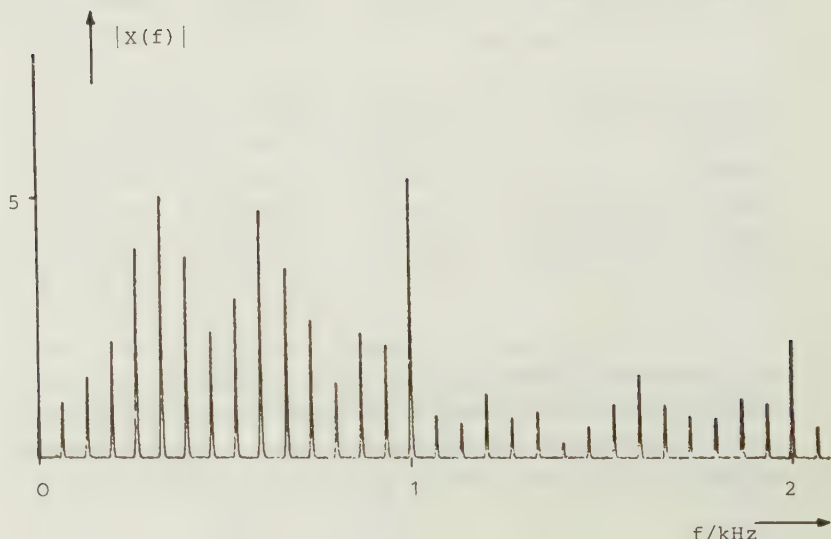


Bild 4.27 Spektrum $|X(j\omega)|$ für Verzögerung $\epsilon = 0$,
oben RC-, unten Allpaß-Korrelator



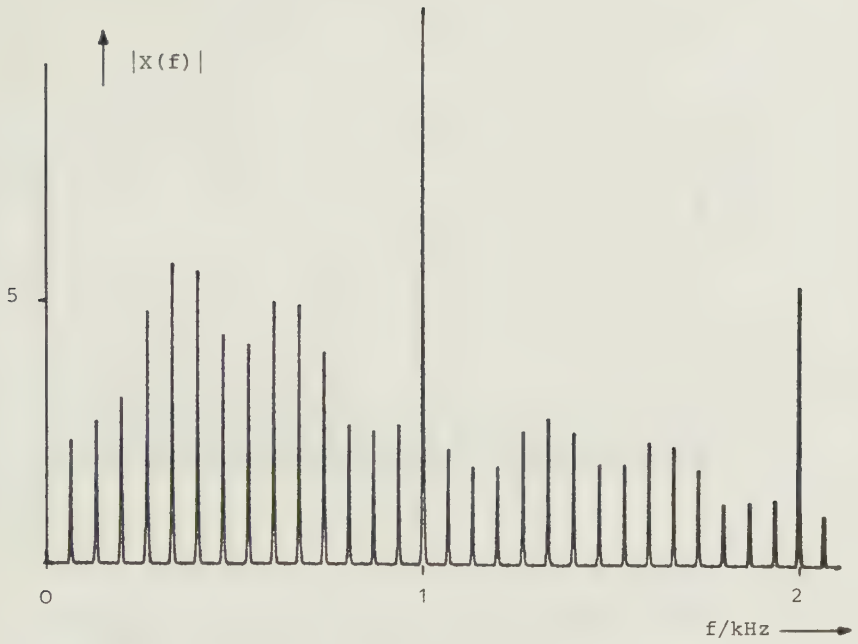
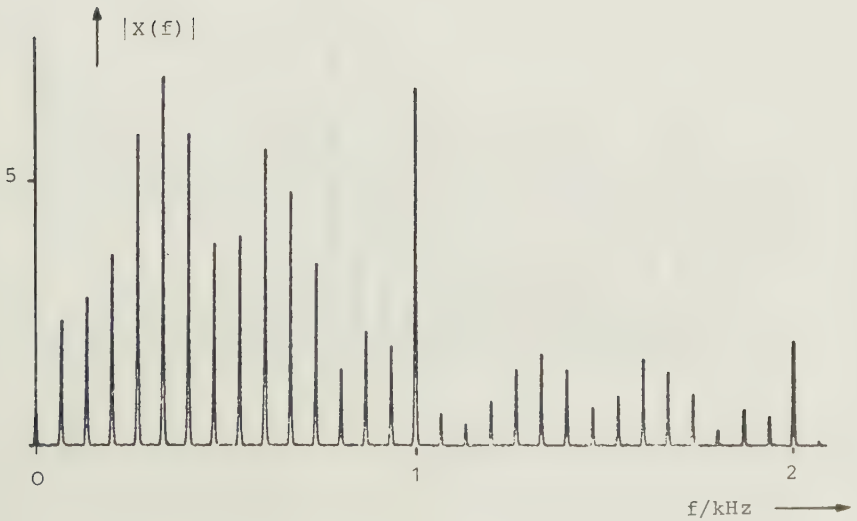


Bild 4.28 Spektren $|X(j\omega)|$ für $\varepsilon = 0,2T_C$,
oben RC-, unten Allpaß-Korrelator



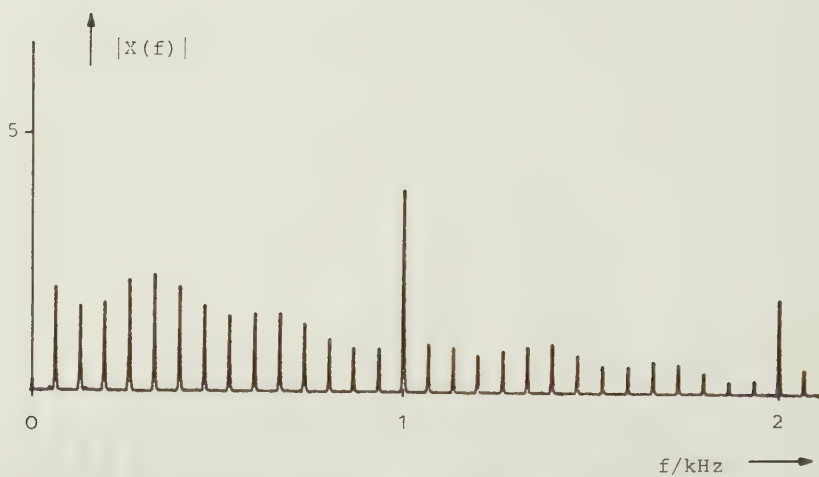
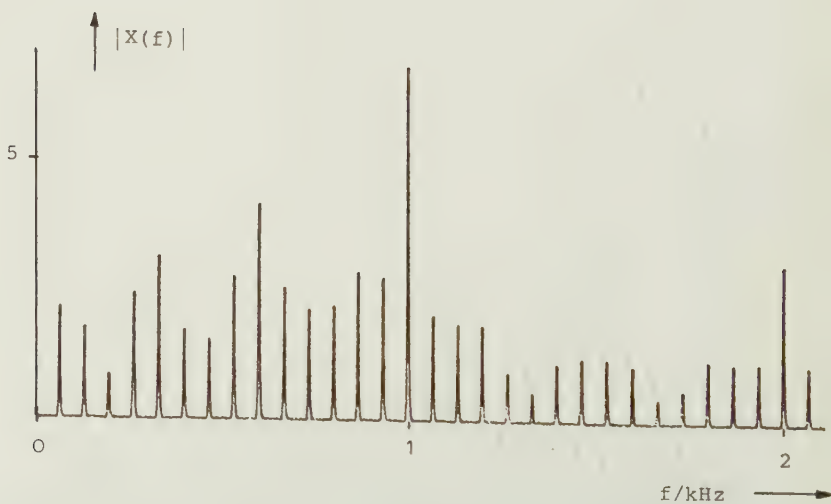


Bild 4.29 Spektren $|X(j\omega)|$ für $\epsilon = -0,2T_c$,
oben RC-, unten Allpaß-Korrelator



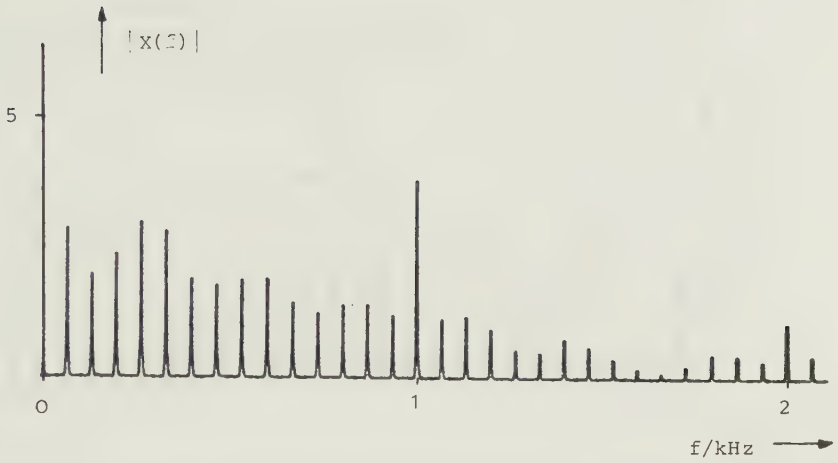
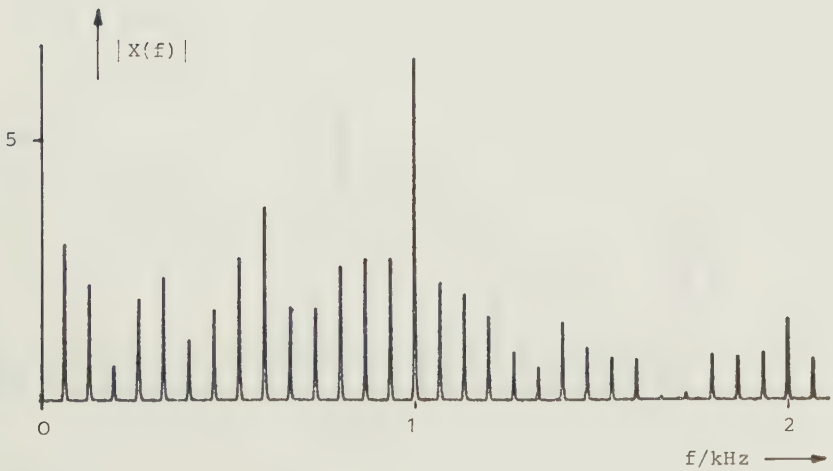


Bild 4.30 Spektren $|X(j\omega)|$ für $\epsilon = 0,4T_c$,
oben RC-, unten Allpaß-Korrelator



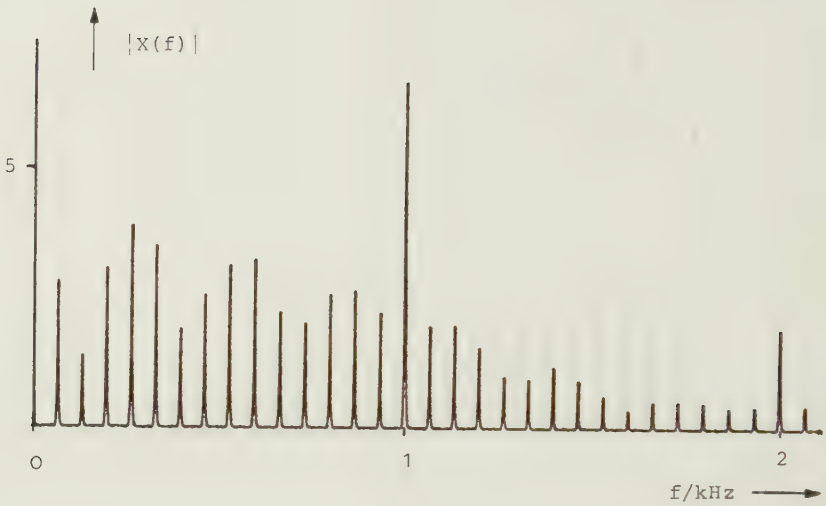
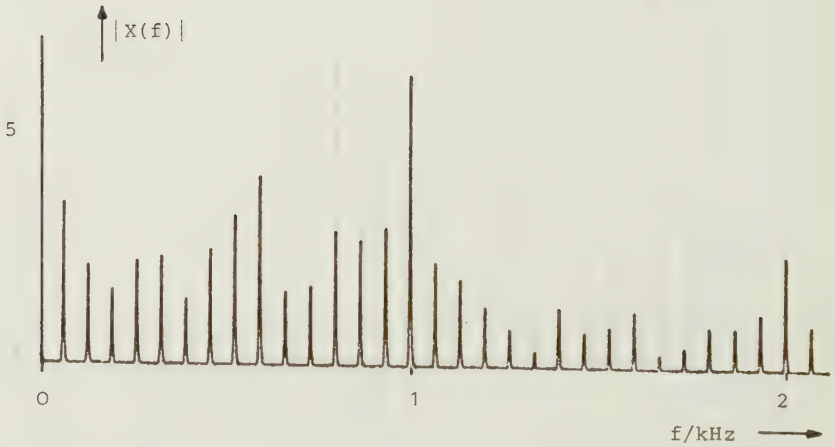


Bild 4.31 Spektren $|X(j\omega)|$ für $\epsilon = -0,6T_c$,
oben RC-, unten Allpaß-Korrelator



wählen. Genau die gleiche Tendenz war schon bei der Betrachtung des durch Empfangsrauschen hervorgerufenen transformierten Rauschens $S_{n,(\omega)}$ erkannt worden, s. Kap. 3.4.

Bei Verwendung mehrstufiger Folgen mit der gleichen AKF, wie sie PN-Folgen besitzen, ergeben sich für das Störspektrum $X(j\omega)$ andere Verhältnisse. Darauf wird hier nicht eingegangen, da beim geschlossenen DLL-Kreis (Kap. 6) die durch das Multiplikationsrauschen hervorgerufenen Störterme außer Betracht bleiben.

5. Weitere mehrstufige Folgen mit vorgebbaren Eigenschaften

5.1 Signale mit Barker-Autokorrelationseigenschaften

Ausgangspunkt ist die Aufgabe, ein durch weißes Rauschen additiv gestörtes Nutzsignal $s(t)$ optimal zu empfangen. Der Einfluß des Störsignals $n(t)$ ist also möglichst zu verringern. Bei einem determinierten, von der Struktur bekanntem Nutzsignal führt die Problemstellung zur Optimalfiltertheorie oder anders formuliert, zur Suche nach einem angepaßtem Empfangsfilter (Matched-Filter) [45], [65]. Speziell in der Radar- oder Sonar-Ortungstechnik kann das Problem durch das folgende Bild 5.1 verdeutlicht werden (Betrachtung im Basisbandbereich).

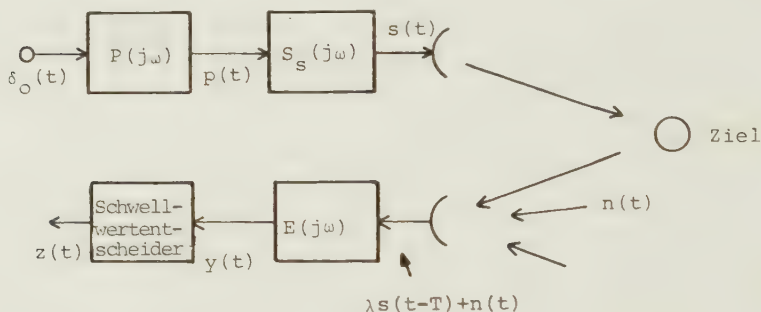


Bild 5.1 Sende-Empfangseinrichtung zur Zielortung

Dabei erzeugt das System $P(j\omega)$ durch periodische Wiederholung bei Delta-Impulserregung am Ausgang einen Dirac-Kamm der Form:

$$p(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \delta_O(t-v \cdot m \cdot T_C). \text{ Das Sendefilter } S_S(j\omega) \text{ soll ein end-}$$

liches Segmentsignal $s_S(t)$ der Länge $p \cdot T_C$ als Impulsreaktion aufweisen. Es besteht also aus p Einzelimpulssignalen der Dauer T_C . Zunächst wird $P(j\omega) = 1$ angenommen, d.h. es wird nur ein einzelnes Segment gesendet, welches nach der Ziellaufzeit T (entspricht doppelter Zielentfernung) gedämpft durch $\lambda < 1$ am Empfangsfilter eintrifft. Weiterhin wirkt am Empfängereingang additiv das weiße Rauschen $n(t)$. Die Optimalfiltertheorie besagt nun, [45], [65], daß ein maximales Signal-Rauschverhältnis am Ausgang des Empfangsfilters $E(j\omega)$ entsteht, wenn gilt:

$$E(j\omega) = \alpha S_s^*(j\omega) \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Wegen der Kausalitätsforderung (Realisierbarkeit) für das optimale Empfangsfilter $E(j\omega)$ muß diese Bedingung erweitert werden zu $(t_0 \geq p \cdot T_c)$

$$E(j\omega) = \alpha S_s^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (5.1)$$

Für diesen Fall errechnet sich die Reaktion am Filterausgang $E(j\omega)$ in folgender Form

$$Y(j\omega) = [\lambda S_s(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} + \mathcal{F}\{n(t)\}] \cdot E(j\omega)$$

und durch Einsetzen von Gl. (5.1) gilt weiter

$$Y(j\omega) = \lambda \alpha |S_s(j\omega)|^2 \cdot e^{-j\omega(T+t_0)} + \mathcal{F}\{n(t)\} \cdot E(j\omega) .$$

Die Rücktransformation liefert

$$y(t) = \lambda \cdot \alpha \cdot R_s(t-T-t_0) + n(t) * [\alpha s_s(t_0-t)] \quad (5.2)$$

Der Empfänger bildet also bezüglich des Nutzsignals die um die Summe aus Signallaufzeit T und Filterlaufzeit t_0 verzögerte Autokorrelationsfunktion des Sendesignalsegmentes (Korrelationsempfänger). Zusätzlich erscheint am Empfangsfilterausgang der durch das Rauschen verursachte Störanteil $\alpha \cdot n(t) * s_s(t_0-t)$. Geeignete Sendesignale $s_s(t)$ müssen also eine AKF $R_s(\tau)$ besitzen mit möglichst großem Hauptmaximum und kleinen Nebenmaxima. Außerdem soll der Energieanteil im Subelement T_c des Signales $s_s(t)$ maximal groß sein. Diese Forderung erfüllt ein Einzelrechteckimpuls der Form $r(t) = \text{rect} \frac{t}{T_c}$. Günstige AKF-Eigenschaften besitzen die erstmals von Barker [6] vorgeschlagenen Codes mit $a_v \in \{-1, 1\}$. Sie existieren für zweiwertige Codes aber nur für die Längen $p \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$. Bild 5.2 zeigt einen solchen Code der Länge $p = 7$ mit der zugehörigen AKF, wobei die Kausalitätsforderung wegen Vereinfachung der folgenden Betrachtungen außer acht gelassen wird.

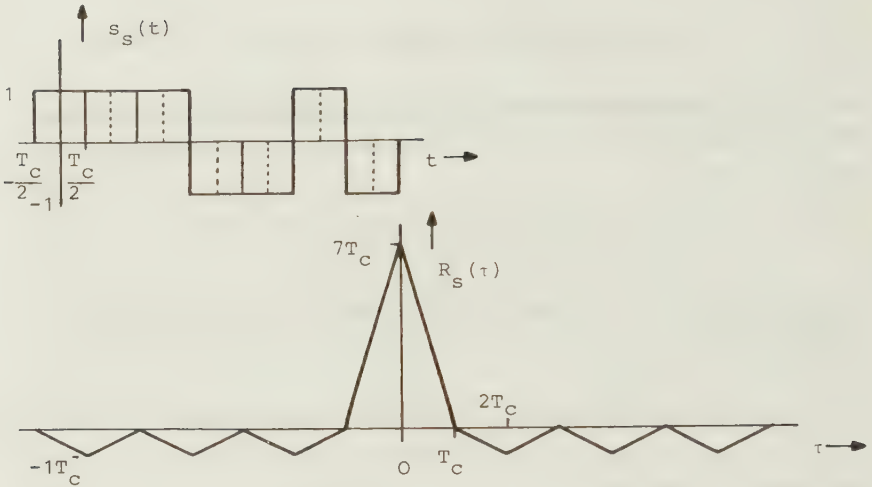


Bild 5.2 Barker-Folge $s_s(t)$ und dazugehörige AKF
für einen Code der Länge $p = 7$

Ähnlich den in Kap. 4.3.2 vorgenommenen Untersuchungen läßt sich die Generierung eines Barker-Segmentes folgendermaßen beschreiben:

$$s_s(t) = r(t) * \sum_{v=0}^{p-1} a_v \cdot \delta_0(t - vT_c) = r(t) * b(t)$$

Die AKF des Segmentes $R_{s_s}(\tau)$ errechnet sich dann zu

$$R_{s_s}(\tau) = s_s(\tau) * s_s(-\tau) = r(\tau) * b(\tau) * r(-\tau) * b(-\tau)$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Faltungsreihenfolge gilt weiterhin

$$\begin{aligned} R_{s_s}(\tau) &= r(\tau) * r(-\tau) * b(\tau) * b(-\tau) \\ &= R_r(\tau) * R_b(\tau) \end{aligned}$$

wobei $R_r(\tau)$ die AKF eines Einzelrechteckes mit

$$R_r(\tau) = \begin{cases} T_c \cdot \left[1 - \frac{|\tau|}{T_c} \right] & \text{für } |\tau| \leq T_c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellt und $R_b(\tau) = b(\tau) * b(-\tau) = \sum_{v=-(p-1)}^{+(p-1)} d_v \cdot \delta_0(\tau - vT_c)$ ist.

Für den letzten Ausdruck wird per Definition eingeführt

$$b(\tau) * b(-\tau) = \sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} d(\lambda) \cdot \delta_0(\tau - \lambda T_c) \quad (5.3)$$

$d(\lambda)$ stellt also die Impuls-Segment-AKF der den Code beschreibenden Elemente a_v dar. Ein Code wird Barker-Code genannt, wenn gilt:

$$\underline{1} \quad a_v \in \{-1, 1\}$$

und

$$\underline{2} \quad d(\lambda) = \begin{cases} p & \text{für } \lambda = 0 \\ \pm 1 & \text{für } \lambda \text{ gerade außer } 0 \\ 0 & \text{für } \lambda \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die bekannten Barker-Codes mit $p \in \{2, 3, 7, 11\}$ gilt $d(2\lambda v) = -1$, $v = 1(1) \frac{p-1}{2}$, bei Codes mit $p \in \{5, 13\}$ betragen die Werte $d(2\lambda v) = +1$. Die Folge der Länge $p = 4$ nimmt dabei eine Sonderstellung ein, bei dieser ist $d(1) = d(-1) = -1$, $d(3) = d(-3) = +1$, $d(0) = 4$, $d(2) = d(-2) = 0$.

Wird nun im durch Bild 5.1 dargestellten System eine periodische Wiederholung des Einzelsegmentes durch den Block $P(j\omega)$ in der Form vorgenommen, daß $p(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \delta_0(t - v \cdot pT_c)$ ist ($m = p$), so reiht sich jedes nachfolgende Segment $s_s(t)$ an das vorangegangene an; die jetzt entstehende periodische Impuls-AKF $R_d(\lambda)$ entsteht aus der Überlagerung für die 1. Periode in der Form $R_d(\lambda) = d(\lambda) + d(\lambda - p)$. Die gesamte periodische AKF $R_s(\tau)$ errechnet sich dann in folgender Form für eine Periode

$$R_s(\tau) = R_r(\tau) * \sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} R_d(\lambda) \cdot \delta_0(\tau - \lambda T_C)$$

und

$$R_s(\tau \pm p T_C) = R_s(\tau)$$

Bei Folgenlängen mit $p \in \{2, 3, 7, 11\}$ ergibt sich eine periodische AKF wie bei den Pseudo-Noise-Folgen, d.h. bei Vorliegen von $R_s(\tau)$ kann nicht mehr unterschieden werden, ob die zugehörigen Signalsegmente nach Barker- oder nach PN-Folgen-Koeffizienten codiert sind. Das folgende Bild 5.3 zeigt diese Überlagerung für eine Barker-Folge der Länge $p = 7$. Zur Unterscheidung sind also Kenntnisse über die Segment-AKF $d(\lambda)$ erforderlich.

Ein derart periodisch fortgesetztes CW-Ortungssignal $s(t)$ (CW = continuus wave-Signal) eignet sich zur Verfolgung eines Zieles, d.h. zur Erfassung von Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung gut, hier sind also bei Längen $p > 13$ Signale mit $p \in \{2^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ durch Pseudo-Noise-Codierung herstellbar. Sollen hingegen mehrere Ziele innerhalb einer Sendeperiode entfernungsmäßig auflösbar sein (Pulsradar-Betrieb), so muß die Segmentdauer $p T_C \ll m T_C$ (Periodendauer) sein. Hier sind bis jetzt nur die in der Länge begrenzten Barker-Codes mit den günstigen Eigenschaften der zugehörigen Segment-Impuls-AKF $d(\lambda)$ bekannt. Da bereits festgestellt wurde, daß der Signal-typ $s_s(t)$ in der Segment-AKF $d(\lambda)$ Niederschlag findet, ist es umgekehrt möglich, sich aus einem vorgebbaren Verlauf von $d(\lambda)$ zugehörige brauchbare Signalklassen $s_s(t)$ zu synthetisieren. Das Verfahren benutzt - wie in Kap. 4.3.2 gezeigt - die Spiegelpolynomdarstellung von $D(z) = Z\{d(\lambda)\}$, aus der nach Faktorisierung und entsprechender Nullstellenauswahl Systeme $B_k(z)$ zur Codegenerierung ausgewählt werden können. Es ist ausführlicher in [36] geschildert. Allerdings führt das Syntheseverfahren auf i.a. mehrstufige Codes, d.h. $a_v \in \mathbb{R}$. Diese Tatsache ist aber bei einem geeigneten Modulationsverfahren (Modulation des Basisband-Signals auf einen HF-Träger) für das Sendesignal z.B. durch Verwendung von Frequenzmodulation kein Nachteil. Es können auf diese Weise auch Codes der Länge p mit einem größeren Hauptnebenmaxi-

mumsverhältnis als p angegeben werden. Bild 5.4 zeigt dafür bei einer Codelänge $p = 7$ ein Beispiel.

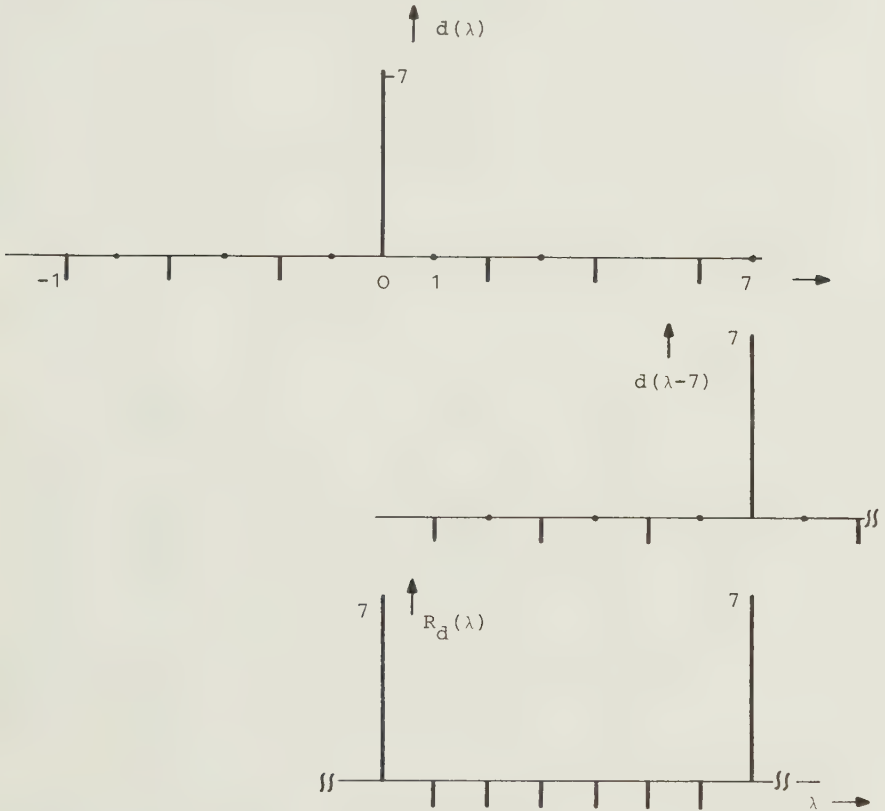


Bild 5.3 Zur Bildung der periodischen Impuls-AKF durch Überlagerung der Segment-Autokorrelierten $d(\lambda)$.

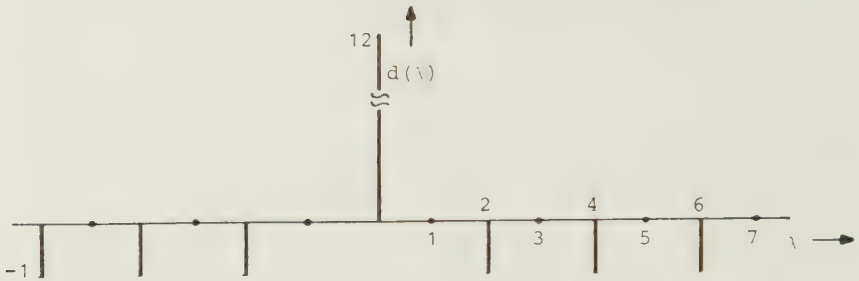


Bild 5.4a Vorgegebene Segment-Impuls-AKF $d(\lambda)$

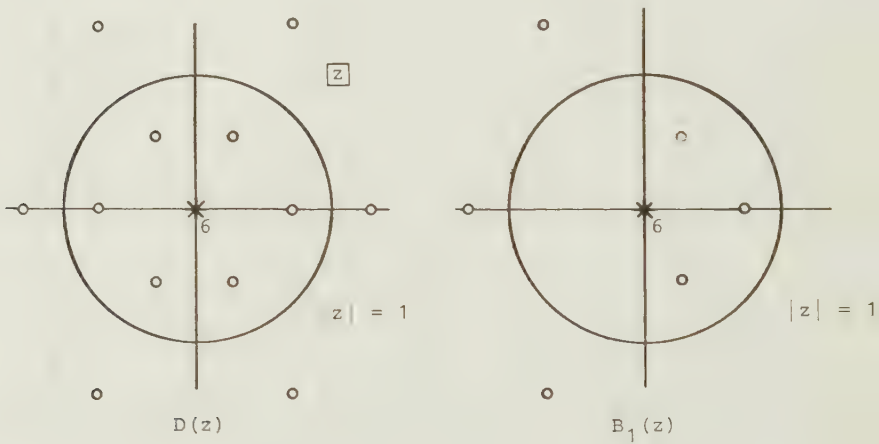


Bild 5.4b Spiegelpolynom $D(z) = Z\{d(\lambda)\}$ und Auswahl eines $B_1(z)$

Nach Normierung und Rücktransformation ergeben sich die den Code beschreibenden Werte a_v zu

$$a(0) = 1 ; \quad a(1) = 1,495286511 ; \quad a(2) = 1,617940878$$

$$a(3) = -0,541083278 ; \quad a(4) = -1,617940878$$

$$a(5) = 1,495286511 ; \quad a(6) = -1$$

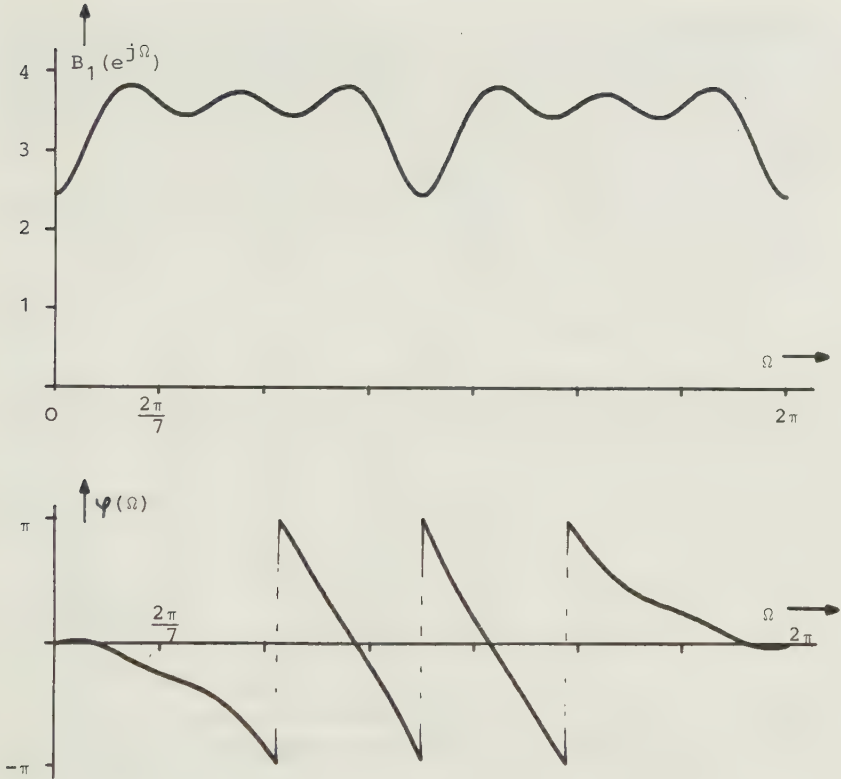


Bild 5.4c Betrag und Phase von $B_1(z)$ für $z = e^{j\Omega}$

Bild 5.5 zeigt den Verlauf dieser Folge (gestrichelt) mit größerer Energie im Vergleich zu dem Barker-Code der Länge $p = 7$ mit $a_v \in \{-1, 1\}$.

Bei der $-1, 1$ Barker-Folge trägt jedes Subelement der Breite T_c 14,286 % der Segmentenergie, beim mehrstufigen im Beispiel gezeigten Code hingegen führen 1. und letztes Teilelement je 8,333 %, 2. und vorletztes je 18,632 %, 3. und drittletztes je 21,814 % und das mittlere Teilelement 2,44 % der gesamten Energie. Mit dem in [36] aufgeführten Verfahren können beliebig lange ungerade Mehrstufenfolgen synthetisiert werden, deren AKF die "Barker-Bedingung" erfüllen. Neben den typischen Barker-

AKF-Eigenschaften mit $d(\lambda) = 0$ für alle geraden λ außer 0 ist es nun auch möglich, andere geeignete Funktionen $d(\lambda)$ mit günstigem Haupt-Nebenmaximumsverhältnis vorzugeben, um daraus die zugehörigen Segmentsignale $s_s(t)$ zu bestimmen. Dabei steigt generell die Vielfalt der erzeugbaren Signale mit steigender Folgenlänge p wegen der damit steigenden Zuordnungsmöglichkeiten der $B_k(z)$ mit $B_k(z) \cdot B_k(\frac{1}{z}) = D(z) = Z\{d(\lambda)\}$.

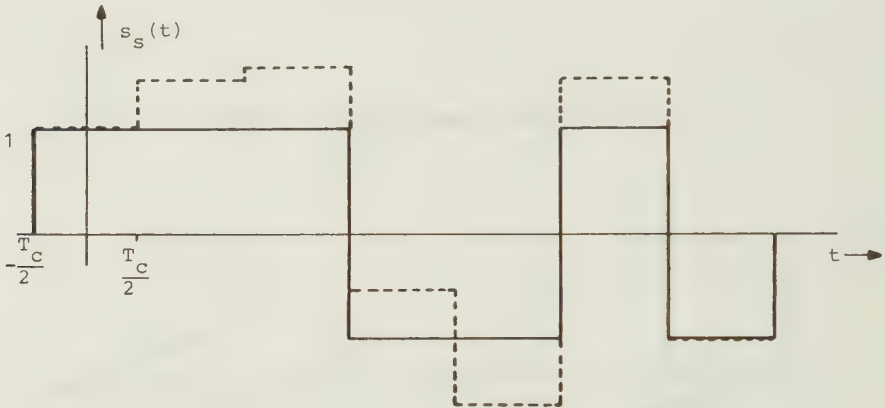


Bild 5.5 Vergleich der $p = 7$ -Barker-Folge mit einer mehrstufigen Folge mit größerem Hauptmaximum der zugehörigen AKF.

5.2 Mittelwertfreie Folgen

5.2.1 Synthese

Zur optimalen Entfernungsschätzung (Bestimmung von T) eines Zieles kann prinzipiell auch ein DLL-Korrelator eingesetzt werden. Der Einfachheit wegen werden die folgenden Betrachtungen mit dem Verzögerungsmodell nach Bild 3.42a vorgenommen. Bei einem Impulsradar werden zweckmäßig Impulssegmente verwendet, die wegen der steigenden Auflösung impulskomprimierende Eigenschaften aufweisen. Bei dem " $2 \cdot T_c$ "-Verzögerungsmodell können Segmentsignale $s_s(t)$ mit Barker-AKF-Eigenschaften eingesetzt

werden, wie das folgende Bild 5.6 für die Entstehung der Regelkennlinie bei einem Code der Länge $p = 7$ zeigt (Anwendung der Gl. (3.62b) und folgende).

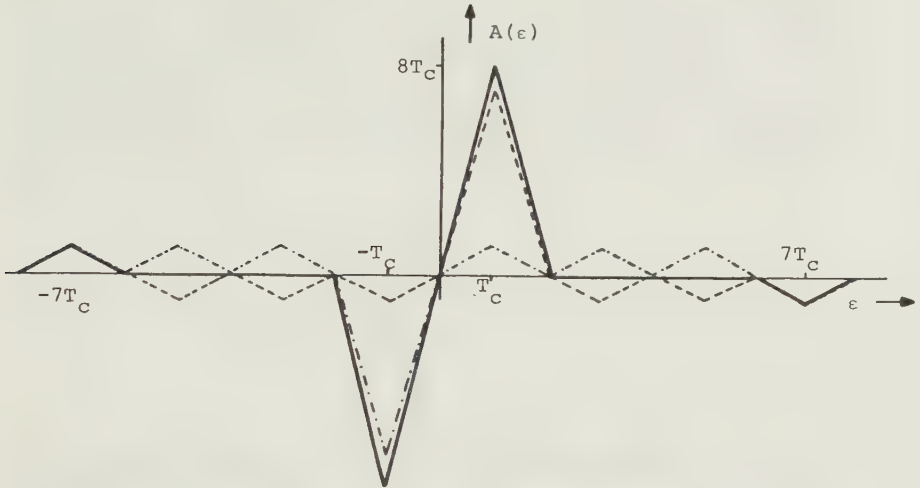


Bild 5.6 Korrelator-Kennlinie bei einem "2- T_c "-Korrelator und Verwendung einer $p = 7$ -Barker-Folge

Offenbar gilt verallgemeinert bei Einsatz von Barker-Folgen für die Steigung der Regelkennlinie beim "2- T_c "-Modell

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = p+1 \quad \text{im Bereich} \quad -T_c \leq \epsilon \leq T_c$$

und für den Verlauf von $A(\epsilon)$ für positive ϵ

$$A(\epsilon) = \begin{cases} (p+1)\epsilon & \text{für } \epsilon \leq T_c \\ -(p+1)(\epsilon - 2T_c) & \text{für } T_c \leq \epsilon \leq 2T_c \\ 0 & \text{für } 2T_c \leq \epsilon \leq (p-1)T_c \\ -[\epsilon - (p-1)T_c] & \text{für } (p-1)T_c \leq \epsilon \leq pT_c \\ \epsilon - (p+1)T_c & \text{für } pT_c \leq \epsilon \leq (p+1)T_c \end{cases}$$

Eine Erhöhung der Steigung im ausnutzbaren Bereich $|\epsilon| \leq T_c$

wäre möglich durch Erhöhung des Haupt-Nebenmaximumsverhältnisses, d.h. durch Anwendung mehrstufiger Codes, wie sie durch die Schilderung des vorigen Abschnittes erreichbar wären. Andererseits ist aber bereits durch die Betrachtungen des 3. Kapitels festgestellt worden, daß die Anwendung des " $1-T_C$ "-Korrektors eine wesentliche Erhöhung der Regelkennliniensteilheit zur Folge hat. Das folgende Bild 5.7 zeigt die Regelkennlinie eines solchen Korrektors wieder am Beispiel einer $p = 7$ Barker-Folge.

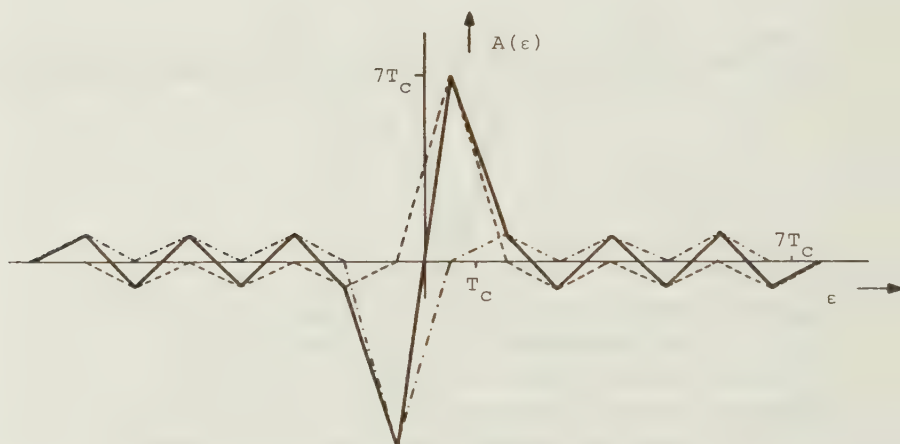


Bild 5.7 Korrelator-Kennlinie eines mit einer $p = 7$ Barker-Folge betriebenen " $1-T_C$ "-Korrektors

In diesem Fall erhöht sich die Steilheit der Kennlinie allgemein bei einer Folgenlänge p zu

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = 2p \quad \text{für} \quad -\frac{T_C}{2} \leq \epsilon \leq \frac{T_C}{2}$$

Allerdings stören die für $-\frac{3T_C}{2} \leq \epsilon \leq -pT_C + \frac{T_C}{2}$ auftretenden Nebenmaxima, da durch die dazwischen liegenden Nullstellen Fehlsyn-

chronisation(False Lock) auftreten kann. Es entsteht also hier der Wunsch nach einer günstigeren Signal-AKF $R_{SS}(\epsilon)$, deren Überlagerung $A(\epsilon) = R_{SS}(\epsilon - \frac{T_C}{2}) - R_{SS}(\epsilon + \frac{T_C}{2})$ diese Nebenmaxima weitestgehend verschwinden läßt. Eine solche AKF - wieder für eine Folgenlänge mit $p = 7$ - und die Überlagerung ist im Bild 5.8 vorgestellt. Dabei wird die Höhe des Hauptmaximums allgemein mit $q \cdot T_C$ angesetzt, d.h. es muß nicht notwendigerweise $q = p$ (Folgenlänge) sein.

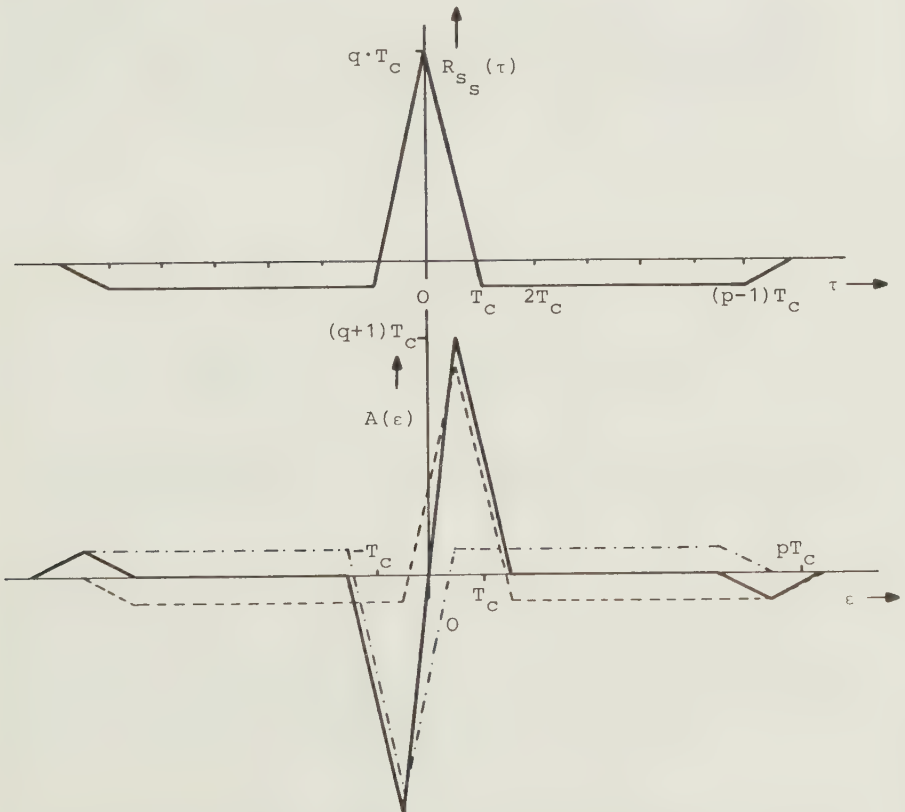


Bild 5.8 Für das "1- T_C "-Modell günstige Signal-AKF und die daraus folgende Regelkennlinie

Die Steigung im Bereich $|\epsilon| \leq \frac{T}{2}$ wird mit

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = 2(q+1)$$

erhalten. Für $q > p$ ergibt sich also die bisher größte Steigung. Außerdem ist die Folgenlänge nicht auf ungerade p wie bei Verwendung von Barker-Codes beschränkt. Wie noch gezeigt wird, kann $p \in \mathbb{N}$ auch als Zweierpotenz gewählt werden.

Die Syntheseraufgabe besteht jetzt darin, aus der gewünschten Segment-Impuls-AKF, wie sie in Bild 5.9 für eine allgemeine Folgenlänge p gezeigt ist, die den Code beschreibenden Elemente a_v , wobei $a_v \in \mathbb{R}$ zugelassen sein soll, zu bestimmen.

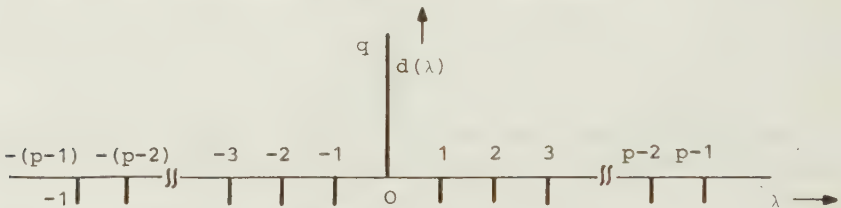


Bild 5.9 Gewünschte Segment-Impuls-AKF $d(\lambda)$ für einen geeigneten Code

Das einer solchen Funktion $d(\lambda)$ zugehörige charakteristische Spiegelpolynom errechnet sich mit der Z-Transformation [64] zu

$$D(z) = q - \sum_{v=1}^{p-1} (z^v + z^{-v}) \quad (5.4a)$$

Aus dieser Beziehung wird für den Frequenzgang auf dem Einheitskreis ($z = e^{j\Omega}$)

$$D(e^{j\Omega}) = q + 1 - \frac{\sin \frac{2p-1}{2} \Omega}{\sin \frac{\Omega}{2}} \quad (5.4b)$$

durch Vereinfachung der endlichen Summe erhalten. Für das Quadrat des Mittelwertes (Gleichanteil) der Folge gilt mit Gl. (5.4b) bei $\Omega = 0$

$$D(e^{j0}) = [B_{\kappa}(e^{j0})]^2 = q+1-2p+1 = q-2(p-1) \quad (5.5)$$

Wird die Gesamtenergie q so gewählt, daß

$$q = 2(p-1) \quad (5.6)$$

gilt, so ergeben sich mittelwertfreie Folgen aus der Rücktransformation der möglichen $B_{\kappa}(z)$, für die gelten muß: $B_{\kappa}(z) \cdot B_{\kappa}(\frac{1}{z}) = D(z)$. Nur dieser Fall der mittelwertfreien Folgen wird hier weiter untersucht. Gilt nun Gl. (5.6), so hat das Spiegelpolynom $D(z)$ notwendigerweise eine doppelte Nullstelle bei $z = +1$, die sich von $D(z)$ abspalten läßt. Aus Gl. (5.4a) wird mit der Beziehung (5.6) für mittelwertfreie Folgen die Bestimmungsgleichung für das Spiegelpolynom bei p -langen Folgen erhalten zu:

$$D(z) = 2(p-1) - \sum_{v=1}^{p-1} (z^v + z^{-v}) \quad (5.7a)$$

$$= (z-1)^2 \cdot D_{\text{Rest}}(z) \quad (5.7b)$$

Das Restpolynom D_{Rest} errechnet sich für die Längen $p = 3, 4, 5, 6$ und 7 in der folgenden Form:

p	$D_{\text{Rest}}(z)$
3	$\frac{(-z^2 - 3z - 1)}{z^2}$
4	$\frac{-z^4 - 3z^3 - 6z^2 - 3z - 1}{z^3}$
5	$\frac{-z^6 - 3z^5 - 6z^4 - 10z^3 - 6z^2 - 3z - 1}{z^4}$
6	$\frac{-z^8 - 3z^7 - 6z^6 - 10z^5 - 15z^4 - 10z^3 - 6z^2 - 3z - 1}{z^5}$
7	$\frac{-z^{10} - 3z^9 - 6z^8 - 10z^7 - 15z^6 - 21z^5 - 15z^4 - 10z^3 - 6z^2 - 3z - 1}{z^6}$

Zur Synthese eines mittelwertfreien Codes der Länge p ist nach der Gl. (5.8) das Spiegelpolynom zu berechnen, daraus die Faktorisierung als Produkt von Linearfaktoren zu bilden (Nullstellensuche mit Digitalrechner), ein $B_K(z)$, welches $B_K(\frac{1}{z}) \cdot B_K(z) = D(z)$ erfüllt, auszuwählen und zurückzutransformieren. Die erhaltenen Koeffizienten $b(k)$ sind so zu normieren, daß $b(0) \cdot b(p-1) = d(p-1)$ gilt, sie stellen dann die Bewertungen der Einzelrechtecke oder Chips der Folge $s_s(t)$ dar. Nachfolgend sind für die Längen $p \in \{6, 7, 8\}$ die PN-Darstellungen von $D(z)$, einem ausgewählten $B_1(z)$, die Impuls-Segment-AKF $d(\lambda)$ und die erhaltenen Folgen $s_s(t)$ gezeigt.

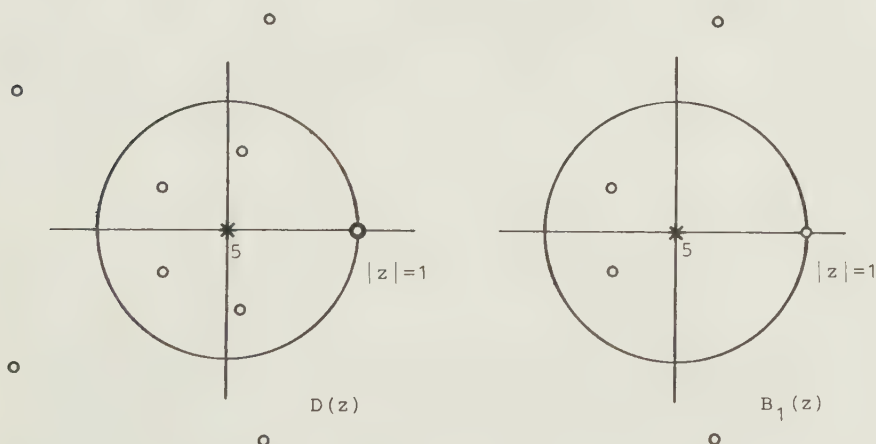


Bild 5.10a Spiegelpolynom $D(z)$ und ein ausgewähltes System für $p = 6$

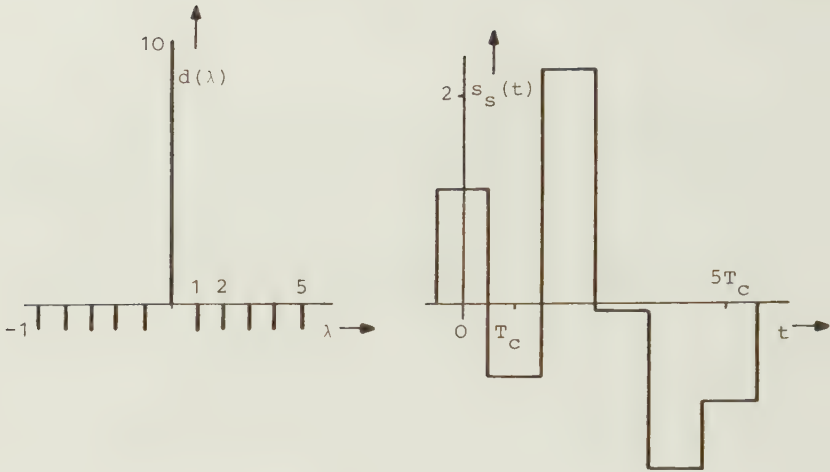


Bild 5.10b Segment-AKF $d(\lambda)$
und eine zugehörige Folge $s_s(t)$
für $p = 6$

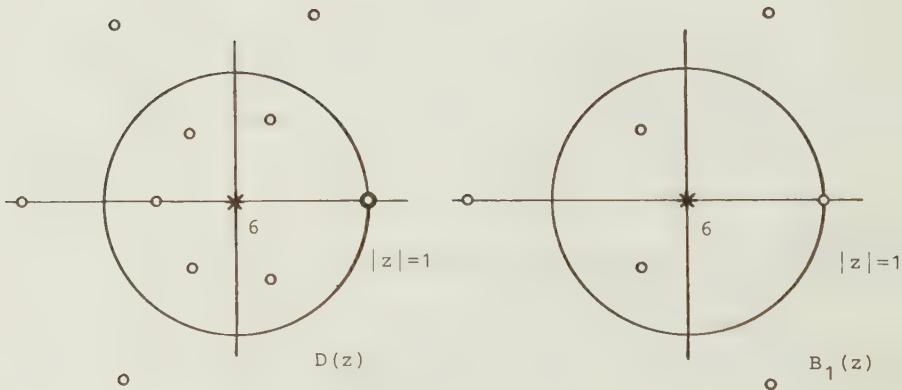


Bild 5.11a Spiegelpolynom $D(z)$ und ein $B_1(z)$ für
eine Folge der Länge $p = 7$

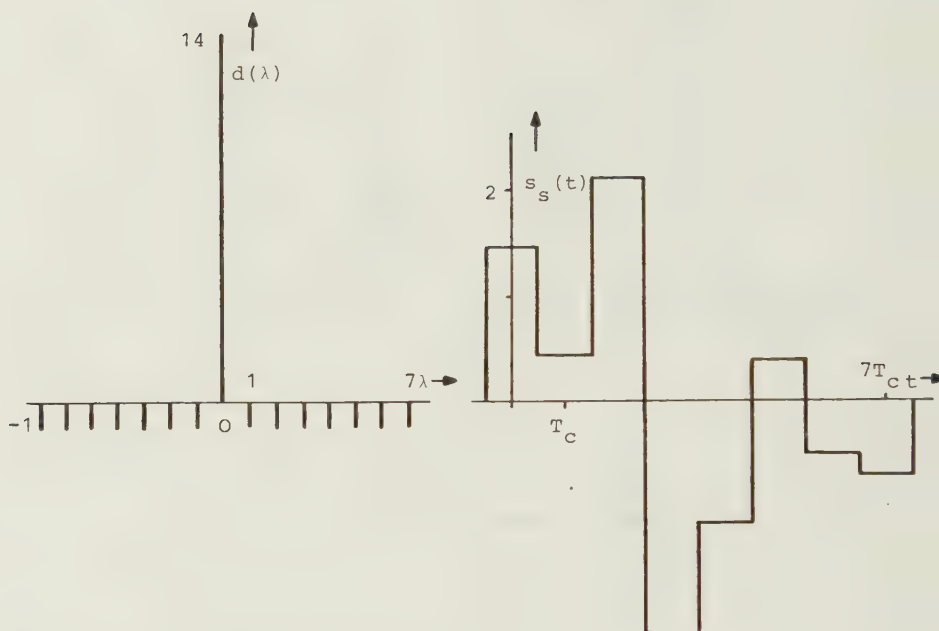


Bild 5.12b Segment-AKF $d(\lambda)$
und eine zugehörige
Folge für $p = 8$

Zusammenfassend sind in der folgenden Tabelle für die 3 Beispiele die Werte der Koeffizienten a_v und die prozentualen Energieanteile für die Einzelchips aufgeführt. Sind mittelfreie Folgen mit einer gleichmäßigeren Segmentenergieverteilung auf die Einzelchips erwünscht, so müssen im ungünstigsten Fall alle erlaubten Kombinationen $B_k(z)$ von einem $D(z)$ durchgerechnet werden, danach kann die in diesem Sinne günstigste Folge ausgewählt werden. Beispielsweise erhält man für die aufgeführte Folge mit $p = 7$ durch Spiegelung der negativ reellen Nullstelle am Einheitskreis (s. Bild 5.11a) ein anderes PN-Diagramm $B_2(z)$. Die Rücktransformation und Normierung liefert dann die in Bild 5.13 dargestellte Folge, wobei die an den Maximalwerten stehenden Zahlen die prozentualen Energieanteile bedeuten

$$(E_{\text{Chip}} = \frac{a_v^2}{d(0)} \cdot 100 \%) .$$

	Energie-		Energie-		Energie-	
	p = 6	anteil	p = 7	anteil	p = 8	anteil
a(0)	1,072227259	11,497 %	0,831418360	5,76 %	1,476685326	15,576 %
a(1)	-0,733024372	5,373 %	0,103874333	0,09 %	0,442916709	1,401 %
a(2)	2,230056399	49,732 %	-0,118299407	0,117 %	2,135780525	32,583 %
a(3)	-0,066388332	0,044 %	2,680671515	59,883 %	-2,210172565	34,892 %
a(4)	-1,570232848	24,656 %	-1,242405852	12,863 %	-1,138390454	9,257 %
a(5)	-0,932638106	8,698 %	-1,052495035	9,231 %	0,444448210	1,411 %
a(6)	0	-	-1,202763913	12,055 %	-0,474075406	1,605 %
a(7)	0	-	0	-	-0,677192345	3,276 %

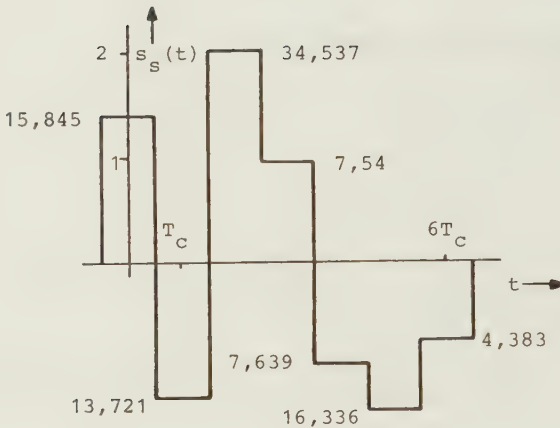


Bild 5.13 Ein anderer mittelwertfreier Code für $p = 7$
mit gleichmäßigerer Energieverteilung

Alle möglichen $B_k(z)$ einer vorgegebenen Codelänge p und einer gewünschten Segment-Impuls-AKF $d(\lambda)$ besitzen den gleichen Betragsfrequenzgang. Die unterschiedlichen Folgen $s_s(t)$ resultieren nur aus unterschiedlichen Phasenverläufen. Wie schon im Kap. 4.3.2 für PN-Folgen erläutert, können aus der minimalphasigen Version einer PN-Konfiguration für $B(z)$ alle anderen möglichen Funktionen $s_{s_v}(t)$ durch geeignete Allpaßtransformationen erzeugt werden. Für die durch die Bilder 5.11 und 5.13 präsentierten beiden Folgen der Länge $p = 7$ zeigt das Bild 5.14 den Betragsverlauf und die Phasen der generierenden Systeme $B_{1,2}(e^{j\Omega})$.

Zwei wesentliche Eigenschaften der behandelten mittelwertfreien Folgen seien noch erwähnt.

1. Die mit $p \cdot T_C$ periodisch fortgesetzten Einzelsegmente $s_s(t)$ haben eine periodische AKF, die der von PN-Folgen sehr ähnelt. Sie stimmt bis auf das Verhältnis von Haupt- zu Nebenmaximum und Bewertung mit einer Konstanten mit der AKF von PN-Folgen überein, wie das Bild 5.15 für $p = 7$ zeigt.

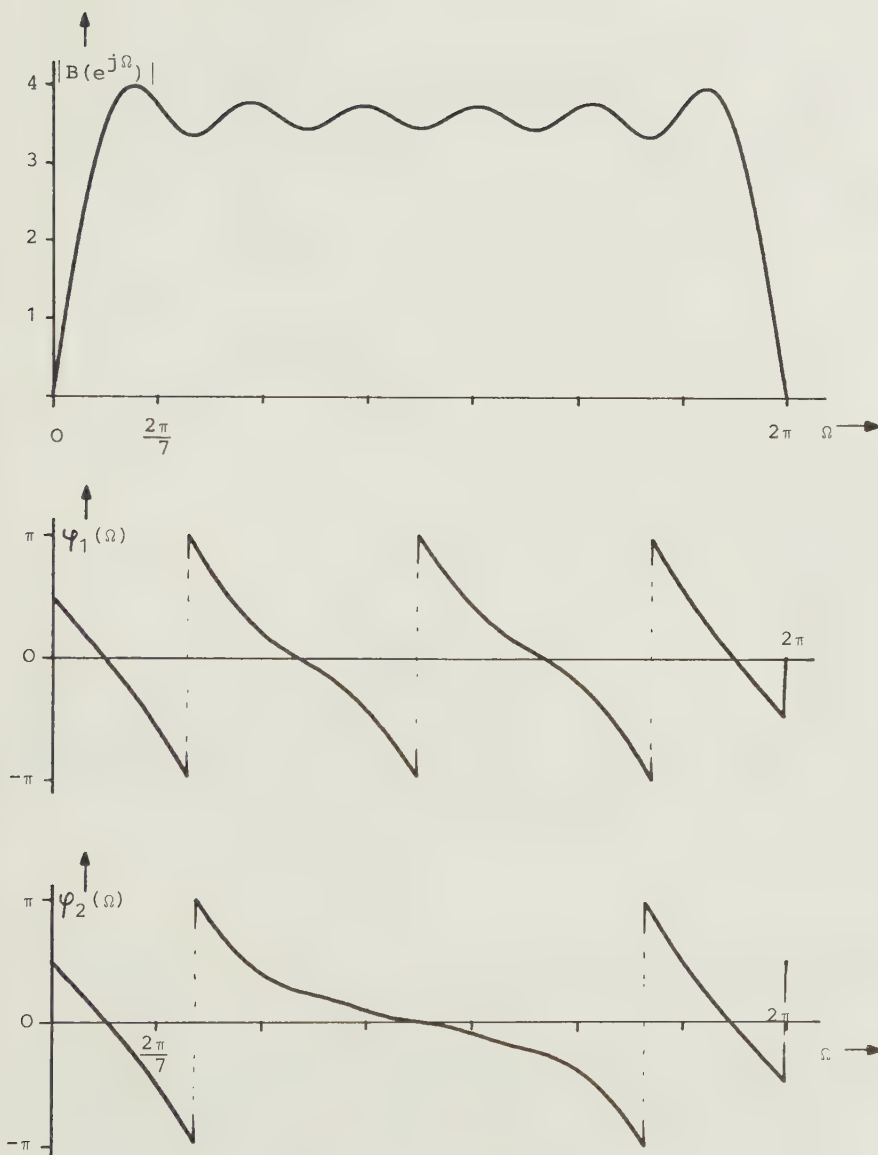


Bild 5.14 Betrags- und Phasenverlauf einer mittelwertfreien Folge mit $p = 7$. φ_1 gehört zum Code nach Bild 5.11, φ_2 ist die Phase der Folge aus Bild 5.13

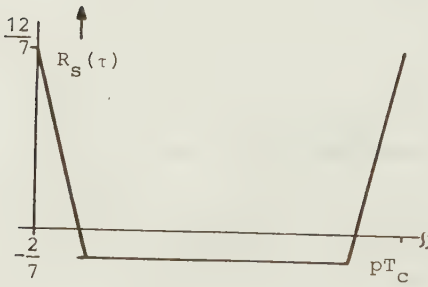
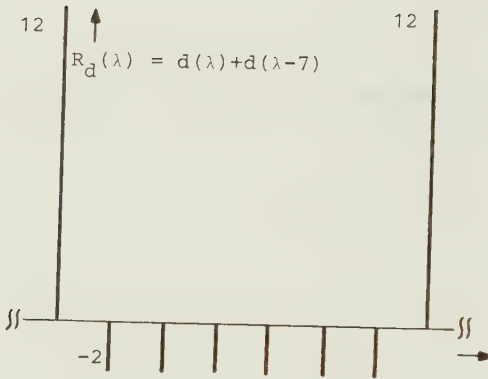
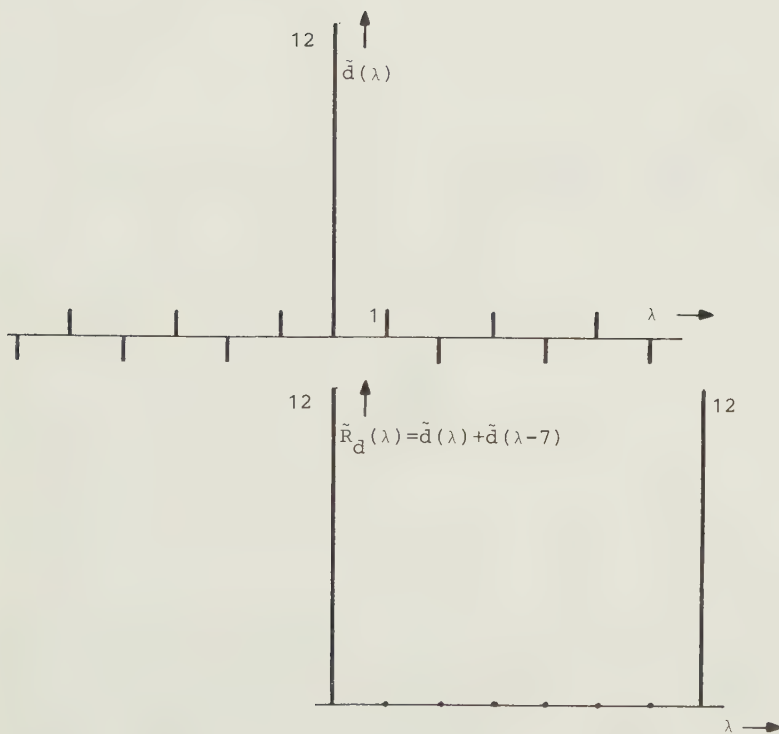
Mittelwertfreie Folge $p = 7$ Pseudo-Noise Folge $p = 7$

Bild 5.15 Periodische Autokorrelationsfunktionen im Vergleich

2. Bei ungeraden Längen mittelwertfreier Codes läßt sich durch die Tiefpaß-Hochpaßtransformation $z \rightarrow -z$ eine periodische AKF mit allen Nebenmaxima $\equiv 0$ erzielen. Solche periodischen Korrelationsfunktionen sind charakteristisch für verschiebungssorthogonale Funktionen. Darauf wird noch eingegangen. Durch die angegebene Transformation wird das PN-Diagramm von $B_K(z)$ um π gedreht, die Nullstelle bei $z_0 = +1$ kommt zu $z_0 = -1$, die Codes bleiben nicht mehr mittelwertfrei.

Außerdem ändern sich die Vorzeichen bei $\tilde{d}(\lambda)$ und $b(k) = Z^{-1}\{B(z)\}$ für alle ungeraden Werte λ bzw. k . Für eine Codelänge $p = 7$ soll das Bild 5.16 diese Vorgänge verdeutlichen:



$$D(e^{j\Omega}) = 1 + q - \frac{\cos(2p-1) \frac{\Omega}{2}}{\cos \frac{\Omega}{2}}$$

$$= q \text{ für } \Omega = k \frac{2\pi}{p} ; \quad k = 0(1)p$$

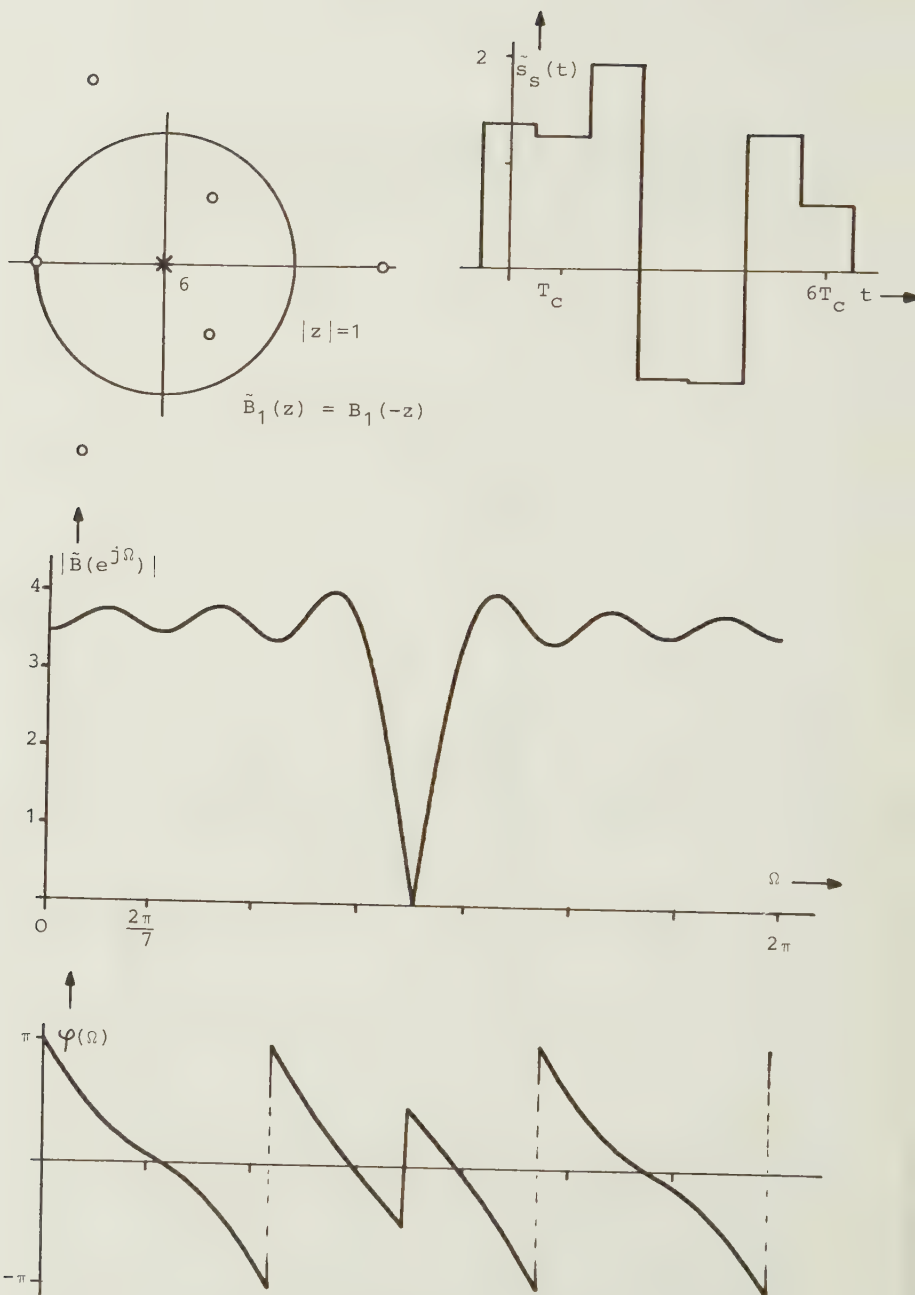


Bild 5.16 Mittelwertfreie Folge mit $p = 7$ transformiert mit $z \rightarrow -z$

5.2.2 Anwendung für die Radarsignalerzeugung

Eine analoge Tracking-Schaltung, welche mit mehrstufigen mittelwertfreien Codes arbeitet, kann wie im folgenden Blockschaltbild 5.17 aufgebaut werden. Als Basis dient der " $1-T_c$ "-Korrelator. Die Verzögerungseinrichtungen seien durch mit CCD-Elementen aufgebauten analogen Verzögerungsleitungen realisiert.

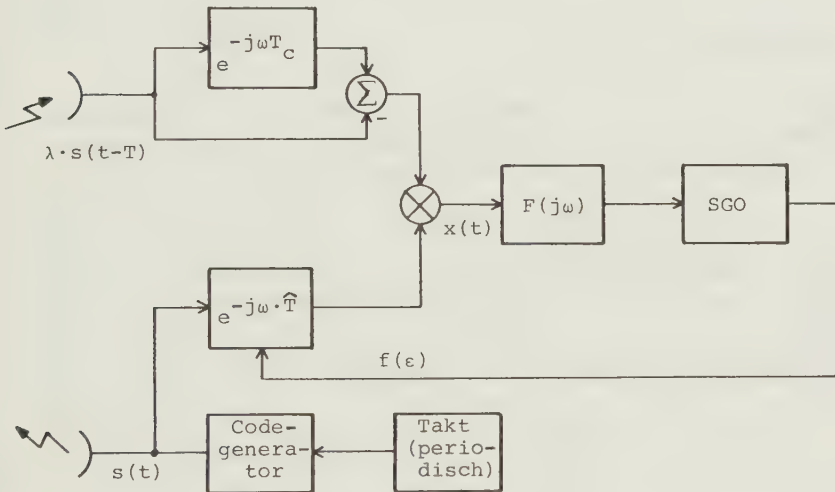


Bild 5.17 Blockschaltbild für analoge Tracking-Schaltung

Die Zielverzögerungszeit T ergibt sich aus der Ablage vom vorliegenden $\hat{T}(\epsilon) \sim \frac{1}{f(\epsilon)}$ gegenüber $T(0) = \frac{T_c}{2}$, d.h. die Nutzinformation liegt in der momentanen Frequenz f des SGO. Eine digitale Auswertung der Frequenzablage ist denkbar. Die vorgestellte Schaltung ist mit von Frank [20] und Jirmann [33] realisierten CCD-Verzögerungsleitungen aufgebaut worden und hat die angestellten Überlegungen bestätigt. Mit einem ähnlichen wie durch Gill und Spilker in [24] vorgestelltem Verfahren lassen sich bei Verwendung von nicht bandbegrenzten Rechteckchips für $s(t)$ die Störspektren $S_x(\omega)$ in Abhängigkeit von ϵ geschlossen berechnen. Auf eine Darstellung muß wegen des großen Umfanges hier verzichtet werden.

5.3 Periodische orthogonale Signale

Es bleibt die Frage offen, mehrstufige Folgen zu synthetisieren, die für alle p (auch geradzahlig und damit auch als Zweierpotenz ausdrückbar) innerhalb einer Periode die AKF eines echten Zufallssignales aufweisen. Das führt zur allgemeinen Betrachtung von periodischen verschiebungorthogonalen Signalen.

5.3.1 Synthese

Weist eine aus mit a_v bewerteten Einzelrechtecken zusammengesetzte Folge $s_s(t)$, die mit der Folgenlänge p periodisch zu $s(t)$ fortgesetzt wird, eine periodische AKF der Form (Impuls-AKF)

$$R_s(\tau) = \begin{cases} R_s(0) & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{für } T_c \leq |\tau| \leq (p-1)T_c \end{cases} \quad (5.9)$$

auf, so ist sie verschiebungorthogonal, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} R_{s_1 s_2}(\tau) &= \frac{1}{pT_c} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_1(t+\tau+T) dt \\ &= 0 \text{ mit } s_2(t) = s_1(t+T) \\ &\quad \text{für } T_c \leq |T| \leq (p-1)T_c. \end{aligned}$$

Betrachtung nur der die Koeffizienten repräsentierenden diskreten Werte führt auf Vereinfachungen. Hierfür gilt mit der in [37] verwendeten Nomenklatur [$s(t) \rightarrow v_o(k)$; $s_s(t) \rightarrow u(k)$]:

$$v_o(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(k-ip) \quad (5.10)$$

mit $u(k)$ als eine Periode der Länge p aus $v_o(k)$. Eine Periode der diskreten Autokorrelierten bestimmt sich zu

$$R_o(\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} v_o(k) \cdot v_o(k+\lambda) \quad \lambda \in [0, p-1]$$

$$= d(\lambda) + d(\lambda-p) \quad (5.11)$$

Die Impuls-Segment-AKF $d(\lambda)$ errechnet sich dann in bekannter Weise zu

$$d(\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} u(k) u(k+\lambda) . \quad (5.12)$$

Dabei gilt für beide definierten Korrelationsfunktionen nach Gl. (5.11) bzw. (5.12)

$$R_o(\lambda) = R_o(-\lambda) \quad \lambda \in [1, p-1]$$

$$d(\lambda) = d(-\lambda) \quad \lambda \in [1, p-1]$$

Bereits im vorigen Abschnitt wurden für ungerade mittelwertfreie mehrstufige Codes durch die Tiefpaß-Hochpaßtransformation periodische Autokorrelationsfunktionen mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Weiterhin hat Grallert in [27] und [28] durch Änderung der "1" in A und der "-1" in B die maximal langen Pseudo-Noise Folgen, die aber bekanntlich nur für $p = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ existieren, orthogonalisiert. Mit der auf S. 21 in [28] angegebenen Gleichung ergeben sich die Amplituden A und B wie folgt:

$A = \pm \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2^n}} \right) \cdot \sqrt{\frac{2^{n/2+1}}{2^{n/2}-1}}$	$\pm \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2^n}} \right) \cdot \sqrt{\frac{2^{n/2-1}}{2^{n/2}+1}}$
$B = \mp \sqrt{\frac{2^{n/2+1}}{2^{n/2}-1}}$	$\mp \sqrt{\frac{2^{n/2-1}}{2^{n/2}+1}}$

(5.13)

Nach Umformung lassen sich die Werte A und B der 1. Spalte auch in der folgenden Form angeben:

$$B = + \frac{1}{2^n - 1} \quad (5.14)$$

$$A = - B \cdot \left(1 - \frac{2}{2^n}\right)$$

Bild 5.18 zeigt für eine orthogonalisierte PN-Folge der Länge $p = 7$ das PN-Diagramm, die Folge und Betrag und Phase des den Code generierenden Systems. Zum Vergleich sind im PN-Diagramm - durch Quadrate dargestellt - die Nullstellen einer -1, 1 PN-Folge markiert. Die stärkste Änderung der Nullstellenlage geschieht für niedrige normierte Frequenzen, d.h. der lineare Mittelwert erfährt die größte Änderung. Die an den Maximalwerten des Codes stehenden Zahlen gehen wieder den prozentualen Energieanteil der Einzelchips bezogen auf die Segmentenergie an.

Zur praktischen Orthogonalisierung (noch nicht normiert) genügt es, der -1, 1-Folge eines PN-Generators einen geeigneten Gleichspannungsoffset zuzufügen, derart, daß für die orthogonalisierte Folge gilt:

$$\overline{s(t)} = - \frac{1}{p} \quad (5.15)$$

Die Ableitung dieser Beziehung ist im Anhang A10 gezeigt. Anders ausgedrückt bedeutet das:

Mittelwert und Effektivwert bei orthogonalisierten PN-Folgen stehen durch $\overline{s(t)}^2 = \frac{1}{p} \cdot s^2(t)$ in engem Zusammenhang miteinander. Diese Tatsache gilt noch allgemeiner, wie später gezeigt wird. Der Grenzfall der unendlich langen orthogonalen PN-Folge, der echten Zufallsfolge ist in dieser Betrachtung enthalten, denn dann ist das Auftreten von A und B gleichwahrscheinlich, was einen verschwindenden Mittelwert zur Folge hat.

Das weitere Ziel ist es nun, Folgen beliebiger Länge p zu finden, deren periodische AKF die orthogonalen Eigenschaften aufweist. Schlüsselstellung hierzu liefert wieder die Segment-AKF $d(\lambda)$. Des weiteren werden die Betrachtungen wieder für die zeit-

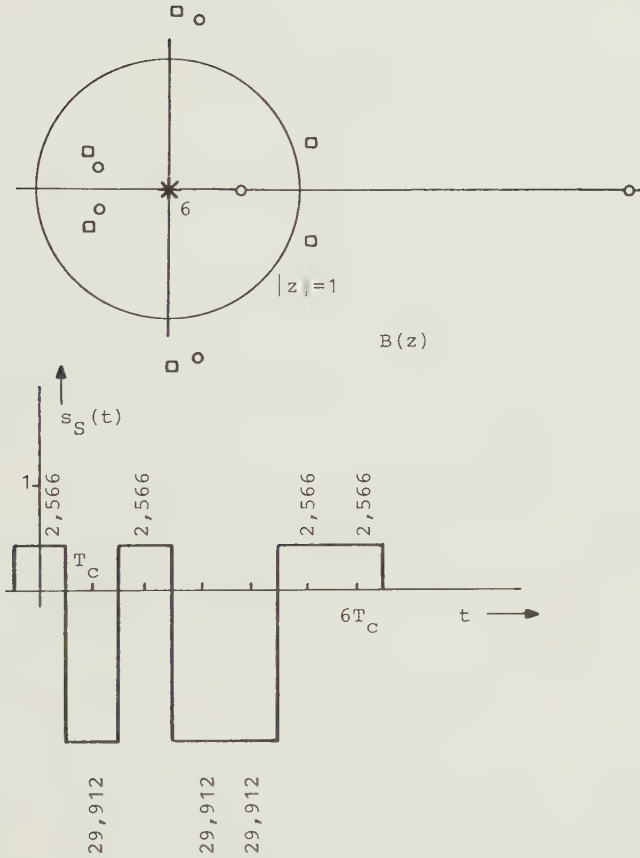


Bild 5.18a PN-Diagramm und orthogonalierte Pseudo-Noise-Folge für $p = 7$

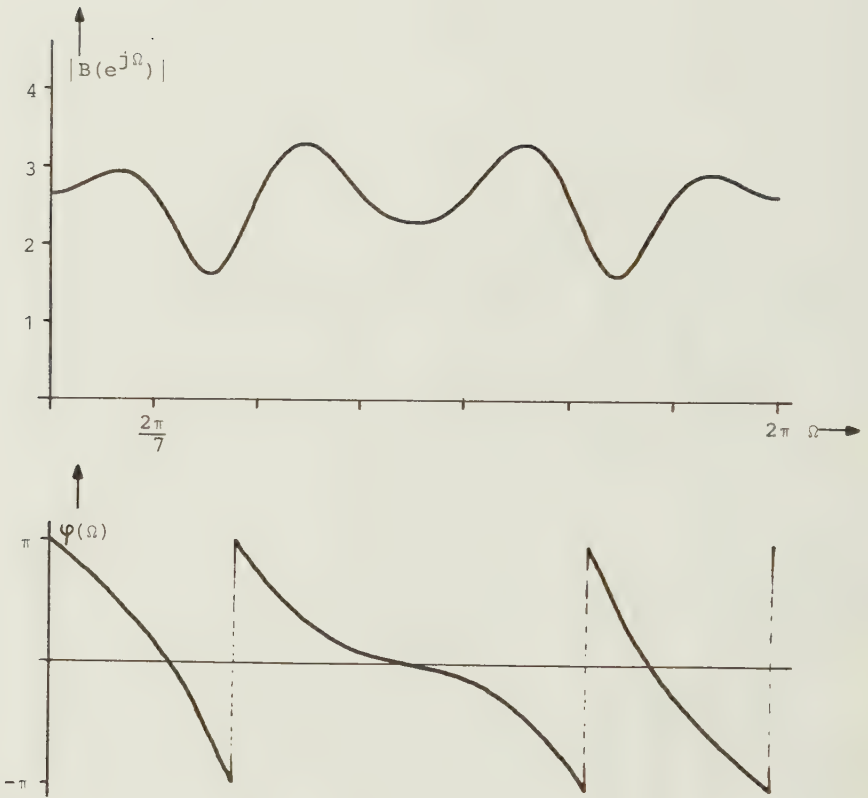


Bild 5.18b Betrag und Phase des einen orthogonalisierten PN-Code mit $p = 7$ generierenden Systems $B(z)$

diskreten Werte und Folgen vorgenommen. Mit den Z-Transformierten

$$U(z) = Z\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{p-1} u(k) \cdot z^{-k}$$

und

$$D(z) = Z\{d(\lambda)\} = \sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} d(\lambda) \cdot z^{-\lambda} \quad (5.16)$$

läßt sich das Spiegelpolynom $D(z)$ ausdrücken als:

$$D(z) = U(z) \cdot U(z^{-1}) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \cdot z^{-k} \right) \left(\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \cdot z^k \right) \quad (5.17)$$

Speziell für $z = 1$ (entspricht $\Omega = 0$, Mittelwert) ergibt sich aus den Gln. (5.16) und (5.17):

$$\sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} d(\lambda) = \left[\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \right]^2 \quad (5.18)$$

Die diskrete Segment-AKF $d(\lambda)$ läßt sich auch über die Beziehung für die diskreten Werte eines Segmentes $u(k)$ in der Form der Gl. (5.12)

$$d(\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} u(k) \cdot u(k+\lambda) \quad (5.12)$$

angeben. Speziell für $d(0) = R_0(0)$ folgt aus der letzten Gleichung

$$d(0) = \sum_{k=0}^{p-1} u^2(k) \quad (5.19)$$

Soll nun durch Überlagerung von periodisch fortgesetzten Segment-Autokorrelierten der Form $d(\lambda) + d(\lambda-p)$ eine periodische AKF mit den Eigenschaften

$$R_O(\lambda) = \begin{cases} R_O(0) = d(0) & \text{für } \lambda = 0 \\ 0 & \text{für } \lambda = 1(1)(p-1) \end{cases} \quad (5.20)$$

entstehen, so muß gelten:

$$d(\lambda) + d(\lambda-p) = 0, \quad \lambda = 1(1)(p-1) \quad .$$

Damit ergibt sich mit den Gln. (5.12), (5.18) und (5.19)

$$\sum_{\lambda=-(p-1)}^{p-1} d(\lambda) = d(0) = \sum_{k=0}^{p-1} u^2(k) = \left[\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \right]^2$$

Notwendig und hinreichend für die Erzeugung einer periodischen AKF mit orthogonalen Eigenschaften ist also bezüglich der periodisch fortzusetzenden Segmentwerte $u(k)$

$$\sum_{k=0}^{p-1} u^2(k) = \left[\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \right]^2 \quad (5.21)$$

Diese Beziehung entspricht im diskreten Fall der zu Gl. (5.15) äquivalenten Aussage, nämlich, daß bei orthogonalen Folgen Effektivwert und Mittelwertquadrat in festem Zusammenhang zueinander stehen müssen. Für die Synthese ist es nun wesentlich, ob nur eine periodische AKF für orthogonale Folgen gefordert wird, oder ob zusätzlich Anforderungen an die Segment-AKF $d(\lambda)$ gestellt werden sollen. Geht das Entwurfsverfahren auf die Segment-AKF zurück, so ist bei ungeradem p zu fordern

$$\left. \begin{aligned} d(\lambda) &= -d(p-\lambda) \\ \text{für } \lambda &= 1(1)\frac{p-1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

damit notwendig $d(\lambda) + d(\lambda-p) = 0$ für $\lambda = 1(1)(p-1)$ wird. Gerade Folgenlängen lassen sich einfach dadurch realisieren, daß gesetzt wird:

$$\begin{array}{lcl}
 d\left(\frac{p}{2}\right) \equiv 0 & & \\
 \text{und} \quad d(\lambda) = -d(p-\lambda) & & \\
 \text{für } \lambda = 1(1)\left(\frac{p}{2}-1\right) & &
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} d\left(\frac{p}{2}\right) \equiv 0 \\ d(\lambda) = -d(p-\lambda) \\ \text{für } \lambda = 1(1)\left(\frac{p}{2}-1\right) \end{array}} \right\} \quad (5.23)$$

Die Werte von $d(\lambda)$ müssen also mit Gl. (5.22) bzw. (5.23) so gewählt werden, daß gilt:

$$\sum_{\lambda=1}^{p-1} d(\lambda) = 0 \quad (5.24)$$

Es ergibt sich eine periodische AKF wie bei den orthogonalisierten PN-Folgen, nun aber für beliebige Längen p , wobei allerdings im allgemeinen $u(k) \in \mathbb{R}$ gilt.

Bei vorliegendem $d(\lambda)$ und Erfüllung der Gln. (5.22) bzw. (5.23) wird durch Z-Transformation das charakteristische Spiegelpolynom $D(z)$ erhalten, aus dem dann die $U_{\kappa}(z)$ und daraus die $u(k) = Z^{-1}\{U_{\kappa}(z)\}$ berechnet werden können (s. [36], [37] und die vorigen Kapitel). Für eine Folgenlänge $p = 8$ und $d(0) = R_0(0) = 12$ zeigt Bild 5.19 das Vorgehen.

Bei der Folge des Beispiels ergibt sich die gleichmäßigste Energieverteilung auf die einzelnen Werte, wenn im PN-Diagramm für $U(z)$ im Bild 5.19a die Nullstellen z_{01} , z_{04} und z_{04}^* am Einheitskreis $|z| = 1$ gespiegelt werden. Die Werte $u(k)$ und die prozentualen Teilenergien ergeben sich dann wie in der Tabelle dargestellt.

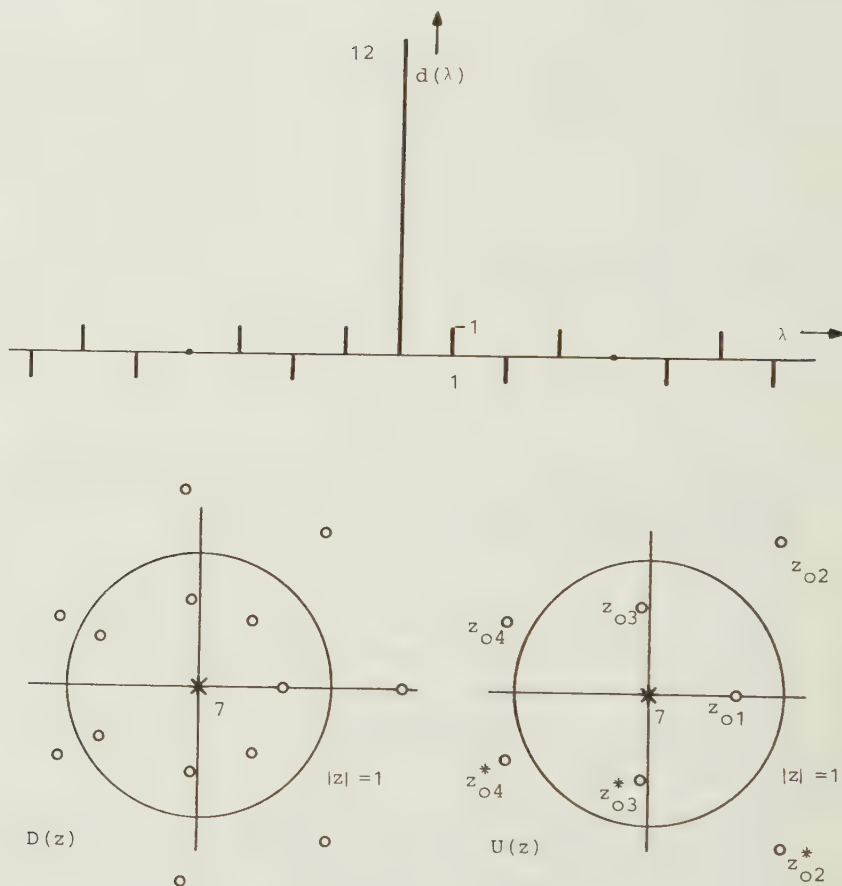


Bild 5.19a Vorgegebene Segment-AKF $d(\lambda)$, Spiegelpolynom $D(z) = Z\{d(\lambda)\}$ und ein $U(z)$ mit $U(z) \cdot U(\frac{1}{z}) = D(z)$ ($p = 8$).

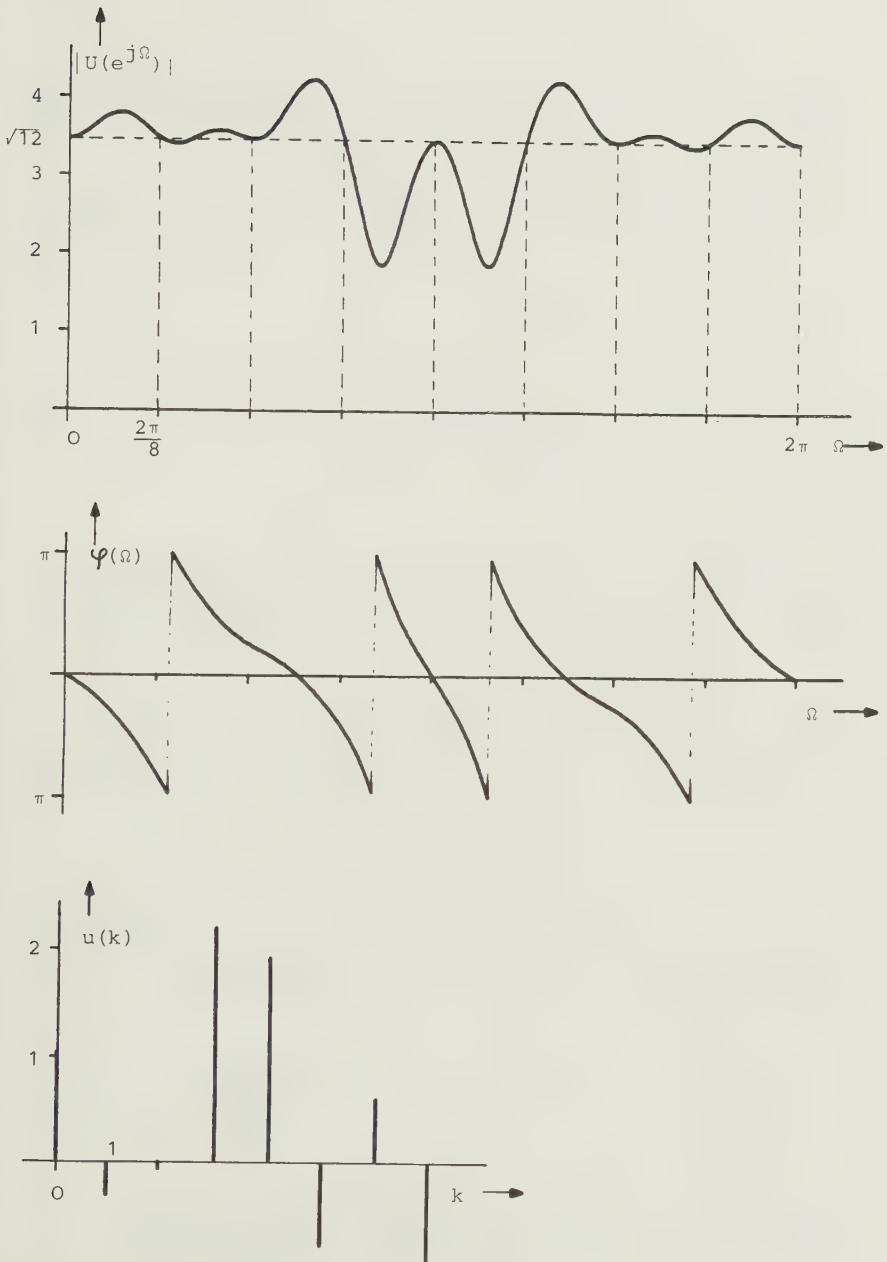


Bild 5.19b Betragsfrequenzgang und Phase eines $U(z)$,
sowie $u(k) = Z^{-1} \{U(z)\}$ ($p = 8$).

		$u^2(k) : d(0)$
$u(0) =$	0,927304905	7,166 %
$u(1) =$	-1,745367321	25,386 %
$u(2) =$	0,989487801	8,159 %
$u(3) =$	1,077974070	9,684 %
$u(4) =$	-0,965440503	7,767 %
$u(5) =$	-1,718314420	24,605 %
$u(6) =$	-0,951352200	7,542 %
$u(7) =$	-1,078393951	9,691 %

Ein Vergleich der Teilenergien pro Wert dieser Folge mit der in Bild 5.18a dargestellten orthogonalisierten PN-Folge zeigt, daß die Orthogonalfolge mit $p = 8$ eine günstigere Energieverteilung aufweist.

Übergang von der diskreten Darstellung zu mit $u(k)$ bewerteten Deltaimpulsen und Faltung mit $r(t) = \text{rect} \frac{t}{T_C}$ ergibt das Segment $s_S(t)$. Periodische Wiederholung durch Faltung in der Form

$$s_S(t) * \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_O(t - v p T_C) \stackrel{!}{=} s(t)$$

führt zur Folge $s(t)$, deren AKF den in Bild 5.20 dargestellten Verlauf hat.



Bild 5.20 AKF der periodisch fortgesetzten mit $u(k)$ bewerteten Rechtecke

Zwei wesentliche Eigenschaften der orthogonalen Folgen $u(k)$ werden noch erwähnt:

- 1 $u_z(k+\lambda)$ sei die um $\lambda \in \mathbb{Z}$ zyklisch verschobene Folge $u(k)$. Dieser Vorgang wird durch Bild 5.21 für eine Folge mit $p = 6$ verdeutlicht.

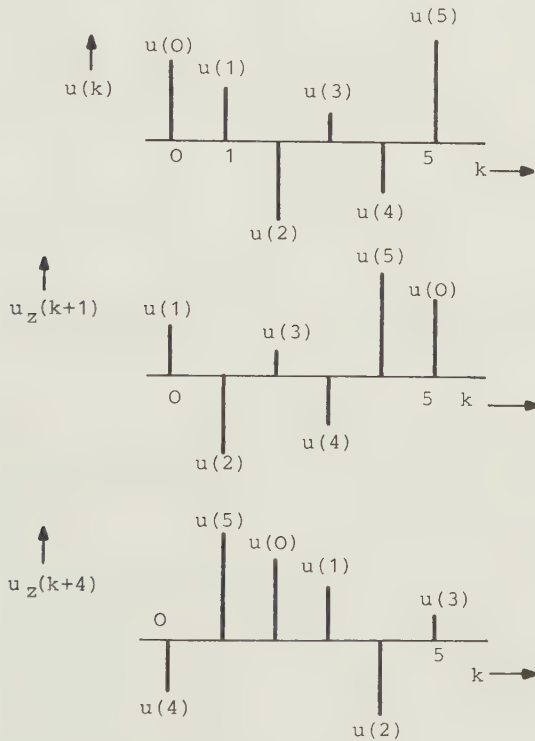


Bild 5.21 Zur Darstellung von $u_z(k+\lambda)$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{p-1} u(k) \cdot u_z(k+\lambda) = 0 \quad \text{für } \lambda = 1(1)(p-1) \quad (5.25)$$

Diese Tatsache ist Basis zum Aufbau von orthogonalen Matrizen der Ordnung p und gibt den Folgen die Eigenschaft der "Verschiebungsortogonalität". Somit entsteht aus einer synthetisierten orthogonalen endlich langen Folge $u(k)$ die $p \times p$ Orthogonalmatrix in folgender Form, die nicht notwendig normiert sein muß, im Beispiel mit $p = 6$.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & u(3) & u(4) & u(5) \\ u(1) & u(2) & u(3) & u(4) & u(5) & u(0) \\ u(2) & u(3) & u(4) & u(5) & u(0) & u(1) \\ u(3) & u(4) & u(5) & u(0) & u(1) & u(2) \\ u(4) & u(5) & u(0) & u(1) & u(2) & u(3) \\ u(5) & u(0) & u(1) & u(2) & u(3) & u(4) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Der sinnvolle Einsatz solcher mit beliebigem p angebbaren Matrizen wird im nächsten Teilabschnitt diskutiert.

- 2 Der Betragsfrequenzgang von $U(z)$ auf dem Einheitskreis, d.h. $z = e^{j\Omega}$, weist in den äquidistanten Werten $\frac{v}{p} \cdot \Omega$ für $v \in \mathbb{Z}$ konstante Werte mit $\sqrt{d(0)}$ auf. Das hat eine wichtige Konsequenz: Sind nur orthogonale Folgen $u(k)$ ohne Vorschrift an die Segment-AKF $d(\lambda)$ gesucht, so kann beim Syntheseverfahren bei längeren Folgen p die aufwendige Faktorisierung (Nullstellensuche) von $D(z) = Z\{d(\lambda)\}$ entfallen, s.a. [37]. Das Leistungsdichtespektrum $S_R(\mu)$ der periodischen diskreten AKF $R_O(\lambda)$ wird mit der diskreten Fouriertransformation (abgekürzt DFT) erhalten zu

$$\begin{aligned} S_R(\mu) &= \text{DFT} \{R_O(\lambda)\} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} R_O(\lambda) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{p}\lambda\mu} \\ &= R_O(0) = d(0) \quad \forall \mu = 0(1)(p-1) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die DFT auf die zu suchende Folge $u(k)$ angewandt ergibt

$$U(\mu) = \text{DFT}\{u(k)\} = |U(\mu)| \cdot e^{j\varphi(\mu)} \quad (5.28)$$

Nun gilt aber:

$$S_R(\mu) = U(\mu) \cdot U^*(\mu) = |U(\mu)|^2 \quad (5.29)$$

Dabei liegt fest

$$|U(\mu)| = \sqrt{R_O(0)} = \sqrt{d(0)} \quad \mu = 0(1)(p-1)$$

was schon im Betragsfrequenzgang des Beispiels aus Bild 5.19 für $p = 8$ zu erkennen war. Die Winkel $\varphi(\mu)$ sind so zu wählen, daß

$$u(k) = \text{DFT}^{-1}\{U(\mu)\} = \frac{\sqrt{R_O(0)}}{p} \cdot \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{j[\varphi(\mu) + \frac{2\pi}{p}k\mu]}$$

reell wird. Das ist erfüllt für

$$\varphi(\mu) = -\varphi(p-\mu) \text{ bei } \mu = 1(1)(p-1) \quad (5.30)$$

Für ungerade p können die Werte $\varphi(\mu)$ für $\mu = 1(1)\frac{p-1}{2}$ beliebig gewählt werden, wobei $\varphi(0) = 0, \pm n\pi, n \in \mathbb{N}$ sein kann, die restlichen Phasenwerte müssen der Gl. (5.30) genügen.

Bei geradem p sind die $\varphi(\mu)$ für $\mu = 1(\frac{p}{2}-1)$ frei wählbar, zusätzlich kann zu $\varphi(0) = 0, \pm n\pi$ $\varphi(\frac{p}{2}) = 0, \pm n\pi$ gesetzt werden. Die Ableitung dieser Bedingungen ist im Anhang A11 gezeigt.

Haben die gewählten Phasen $\varphi(\mu)$ die erwähnten Eigenschaften, so läßt sich für jedes gewünschte p und vorgebbare $R_O(0)$ die orthogonale Folge $u(k)$ direkt, d.h. ohne Nullstellensuche des Spiegelpolynoms $D(z)$ mit der inversen reellen DFT errechnen zu:

$$u(k) = \frac{\sqrt{R_O(0)}}{p} \sum_{\mu=0}^{p-1} \cos[\varphi(\mu) + \frac{2\pi}{p} \cdot \mu k] \quad (5.31)$$

Das folgende Bild 5.22 zeigt für $p = 8$ und $R_0(0) = 8$ ein Beispiel. Die Phasen werden in einer quadratischen Abhängigkeit von μ gewählt und erfüllen Gl. (5.30).

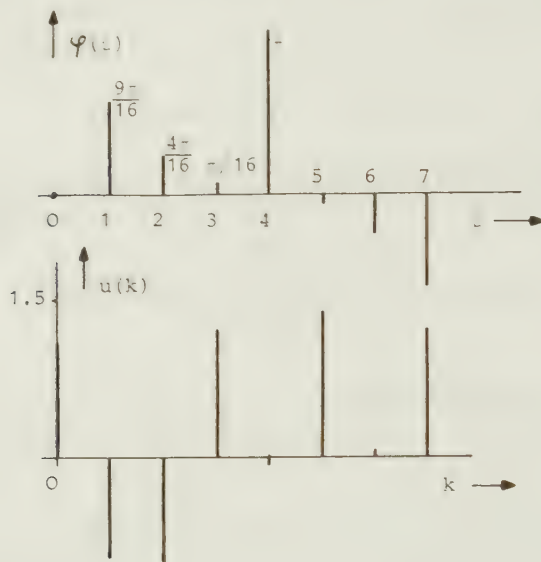
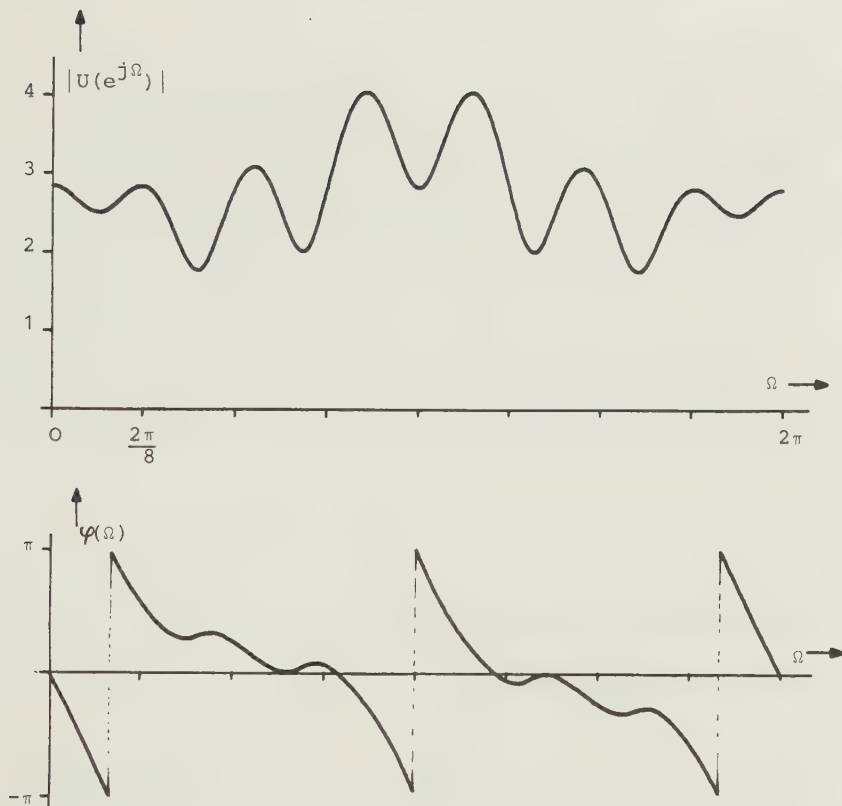


Bild 5.22a Vorgegebene Phasen $\varphi(\mu)$ und errechnete Folge $u(k)$

Vergleich dieses Beispiels mit der gleichlangen orthogonalen Folge aus Bild 5.19b zeigt, daß im Fall quadratischen Phasenverlaufs die Teilenergien pro Chip noch besser aufgeteilt sind, d.h. es liegen mehr Werte in der Nähe von $12,5\% = \frac{100\%}{p}$. Allerdings muß die angesetzte Parabel im Vergleich zur Folgenlänge eine bestimmte Öffnung aufweisen. Auf diese Problematik kann aber hier wegen des erforderlichen Umfangs nicht eingegangen werden.

Orthogonale Folgen mit geradzahligem p haben noch die wesentliche Eigenschaft, daß aus einer Orthogonalfolge $u(k)$ durch die Tiefpaß-Hochpaßtransformation $z \rightarrow -z$ die transformierte Folge $\hat{u}(k)$ wieder Orthogonalfolge ist. Diese Transformation bedeutet im k -Bereich Invertierung aller $u(k)$ mit k ungerade. Der Beweis



		$E = \frac{u^2(k)}{R_O(0)}$
$u(0)$	1,055570233	13,928 %
$u(1)$	-0,968768821	11,731 %
$u(2)$	-1,055570233	13,928 %
$u(3)$	1,207106781	18,214 %
$u(4)$	-0,055570233	0,039 %
$u(5)$	1,382982384	23,908 %
$u(6)$	0,055570233	0,039 %
$u(7)$	1,207106781	18,214 %

Bild 5.22b Betrag, Phase von $U(z)$, Werte und Teilenergien von $u(k) = Z^{-1}\{U(z)\}$

ist einfach durch die zugehörigen Segment-Autokorrelierten $d(\lambda)$ bzw. $\tilde{d}(\lambda)$ zu zeigen: Durch die Transformation $z \rightarrow -z$ ändern sich die Vorzeichen von $d(\lambda)$ für alle ungeraden λ , $d(0)$ bleibt erhalten. Die zu $d(\frac{p}{2})$ geforderte Antimetrie besteht aber nach wie vor, so daß die periodische AKF $R_0(\lambda) = d(\lambda) + d(\lambda-p)$ für eine Periode wieder nur zweiwertig ist mit

$$R_0(0) = d(0), R(\lambda) = 0 \text{ für } \lambda = 1(1)(p-1) .$$

Die Tiefpaß-Hochpaßtransformation zur Erzeugung weiterer Funktionen $\tilde{u}(k)$ aus $u(k)$ ist dem von Taki in [72] geschilderten Verfahren ähnlich.

5.3.2 Anwendung orthogonaler Signale

5.3.2.1 Verwendung beim DLL

Bewertung von Einzelrechtecken mit den $u(k)$ orthogonaler Folgen und periodische Fortsetzung der erhaltenen $(p-1)$ langen Segmente mit $p \cdot T_c$ liefert Signale $s(t)$ mit einer periodischen AKF, die innerhalb einer Periode exakt der AKF eines echten Zufallssignales entspricht. Von einer solchen AKF war bei der Entwicklung der mit analogen Filterpaaren ausgerüsteten Korrelatoren ausgegangen worden. Die dort erhaltenen Ergebnisse für die jetzt periodische Regelkennlinie $A(\epsilon) = A(\epsilon - pT_c)$ und das transformierte Rauschen können voll übernommen werden. Beziehungen für das durch die Multiplikation von den mehrstufigen Empfangs- und Referenzfolgen hervorgerufene Störspektrum stehen aber noch aus. Durch die sehr große Vielfalt von erzeugbaren Orthogonalfunktionen $u(k)$ bei festem p (Variation von $d(\lambda)$ oder Phasenvariation φ_μ bei direkter Synthese) ist ein neuer interessanter Aspekt für die Verschlüsselung und damit Geheimhaltung von mit Codemultiplex übertragbaren Informationen gegeben. Die Orthogonalcodes lassen sich für jedes beliebige p erzeugen. Neue, rein digital arbeitende Korrelatorschaltungen, bei denen wegen der schnellen DFT = FFT (Fast Fourier transform) Zweierpotenzen von p günstig wären, sind denkbar.

5.3.2.2 Die M-Transformation

Zur redundanzmindernden und gegen Bündelstörungen unempfindlicheren Datenübertragung von Bilddaten ist u.a. neben der Walsh-Transformation von Grallert die M-Transformation in [27] und [28] vorgeschlagen worden. Er verwendet als diskreten Transformationskern die nur für $p = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ existenten zweiwertigen orthogonalisierten Pseudo-Noise-Folgen. Durch die in diesem Kapitel beschriebenen orthogonalen Funktionen $u(k)$ ist eine wesentliche Erweiterung dieser Transformation möglich geworden. Die Transformationsmatrix entsteht bei einem $u(k)$ dann in folgender Form:

$$T = [u(k), u_z(k+1), u_z(k+2), \dots, u_z(k+p-1)]^T \quad (5.32)$$

$u_z(k+\lambda)$ stellt dabei wie schon beschrieben, die zu $u(k)$ um λ zyklisch verschobene Version dar. Für eine p lange Datenfolge $h(k)$ im Originalbereich (diskreter Zeitbereich) gilt für die Transformation in den Bildbereich (diskreter "Frequenz"-Bereich):

$$F(i) = \sum_{k=0}^{p-1} h(k) \cdot u(k+i) = \sum_{k=0}^{p-1} h(k-i) \cdot u(k) \quad (5.33)$$

Die diskreten Werte $F(i)$ stellen also die diskrete Kreuzkorrelationsfunktion der zu transformierenden Folge $h(k)$ mit den orthogonalen Kernfunktionen $u_i(k)$ dar. Die letzte Beziehung kann auch durch eine zyklische Faltungsoperation s. [63], Nr. 13, geschrieben werden.

$$F(i) = u(i) \hat{*} h(-i) = u(-i) \hat{*} h(i) \quad (5.34)$$

Die Rücktransformation

$$h(k) = \frac{1}{R_u(0)} \sum_{i=0}^{p-1} F(i) \cdot u(i+k) \quad (5.35)$$

mit dem gleichen Transformationskern $u(k), u_z(k+1) \dots u_z(k+p-1)$ wird eindeutig, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
 h(k) &= \frac{1}{R_u(0)} \cdot \sum_{i=0}^{p-1} u(i+k) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} u(k) h(k-i) \\
 &= \frac{1}{R_u(0)} \sum_i \sum_k u(i+k) \cdot u(k) \cdot h(k-i)
 \end{aligned}$$

Nach Vertauschen der Summationsreihenfolge kann geschrieben werden:

$$h(k) = \frac{1}{R_u(0)} \sum_k \sum_i u(i+k) u(k) \cdot h(k-i)$$

Unter Beachtung von

$$\sum_i u(k) \cdot u(k+1) = R_u(i)$$

wird daraus

$$\begin{aligned}
 h(k) &= \frac{1}{R_u(0)} \cdot \sum_k R_u(i) \cdot h(k-i) \\
 &= \frac{1}{R_u(0)} \cdot R_u(k) * h(k) \equiv h(k)
 \end{aligned}$$

für

$$R_u(k) = \begin{cases} R_u(0) & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.36)$$

Die letzte Gl. entspricht aber gerade der notwendigen und hinreichenden Bedingung für orthogonale (nicht notwendig normierte in Erweiterung zu [28]) Folgen $u_i(k)$.

Mit der Transformationsmatrix T läßt sich die Beweisführung auch darstellen.

$$F(i) = T \cdot [h(k)]^T \quad (5.37)$$

Multiplikation von links mit der inversen T-Matrix liefert:

$$T^{-1} \cdot F(i) = T^{-1} \cdot T \cdot [h(k)]^T \quad (5.38)$$

Für symmetrische orthogonale (nicht normierte) Matrizen gilt aber bekanntlich:

$$\begin{aligned} T &= T^T \\ T^{-1} &= T^T \cdot K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Multiplikation von rechts mit T in der letzten Beziehung ergibt

$$T^{-1} \cdot T = T^T \cdot K \cdot T = K \cdot T \cdot T = E$$

mit E als Einheitsmatrix.

Ausführen der Operation $T \cdot T$ führt unter Beachtung von

$$\sum_{k=0}^{p-1} u(k+\mu) u(k+\mu+i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq 0 \\ R_u(0) & \text{für } i = 0 \end{cases}$$

auf $K = \frac{1}{R_u(0)}$. Dann gilt aber mit Gl. (5.38) und (5.39) für die Rücktransformation:

$$\frac{1}{R_u(0)} \cdot T \cdot F(i) = E \cdot [h(k)]^T \tag{5.40}$$

Das bedeutet, daß für Hin- und Rücktransformation die gleiche Transformationsmatrix verwendet werden kann.

Obwohl $F(i)$ die KKF zwischen zwei $(p-1)$ langen diskreten Folgen darstellt, genügt zur eindeutigen Rücktransformation ein nur $(p-1)$ langer Block für $F(i)$, da wegen der zyklischen Faltungsdarstellung Gl. (5.34) gilt:

$$F(-i) = F(p-i) \tag{5.41}$$

In Erweiterung zu [28] hat das M-Spektrum nach Gl. (5.34) noch folgende Eigenschaft:

$$F(i) = u(i) \hat{*} h(-i) \quad (5.42)$$

$$F(-i) = u(-i) \hat{*} h(i)$$

Nochmalige zyklische Faltung dieser beiden Beziehungen und Umsortierung liefert:

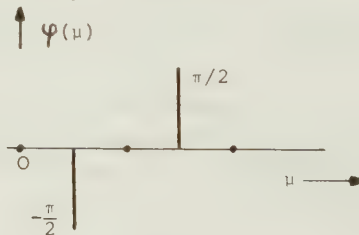
$$\begin{aligned} F(i) \hat{*} F(-i) &= u(i) \hat{*} h(-i) \hat{*} u(-i) \hat{*} h(i) \\ &= [u(i) \hat{*} u(-i)] \hat{*} [h(i) \hat{*} h(-i)] \\ &= R_u(i) \hat{*} R_h(i) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Dabei stellt $R_h(i)$ die (zyklische) AKF des transformierten Signales $h(k)$ und $R_u(i)$ die nur zweiwertige AKF der Transformationsfolge $u(k)$ dar.

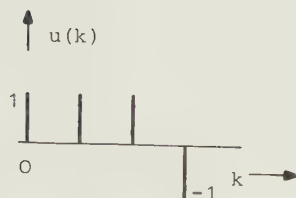
Somit ergibt die zyklische Faltung des M-Spektrums mit seiner Bildinversen die mit $R_u(0)$ multiplizierte AKF des Signals $h(k)$.

Mit dem Syntheseverfahren für orthogonale Folgen $u(k)$ lassen sich neben den i.a. mehrstufigen Ergebnissen durch geschickte Wahl der Phasen $\varphi(\mu)$ auch zweiwertige $u(k)$ finden, die wegen der leichteren Implementierung Bedeutung für die M-Transformation erlangen könnten. Nachfolgend sind einige Beispiele aufgezeigt.

1. $p = 4$, $R_u(0) = 4$, Phasen $\varphi(\mu)$ wählen.



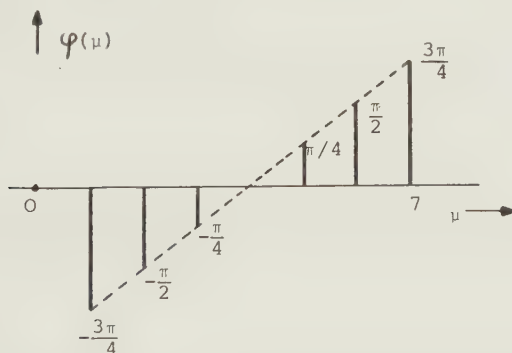
Mit der Gl. (5.31) errechnet sich $u(k)$.



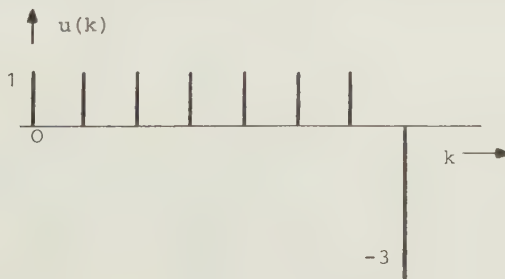
Eine Transformationsmatrix liegt dann fest zu:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $p = 8$, $R_u(0) = 16$, Phasen $\varphi(\mu)$ wählen.



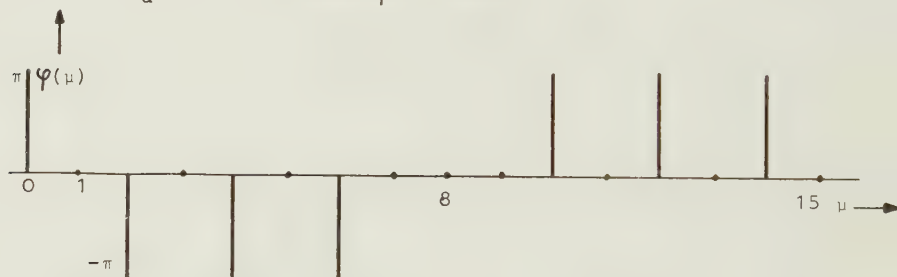
Einsetzen der Phasen in die Gl. (5.31) ergibt die orthogonale Folge $u(k)$



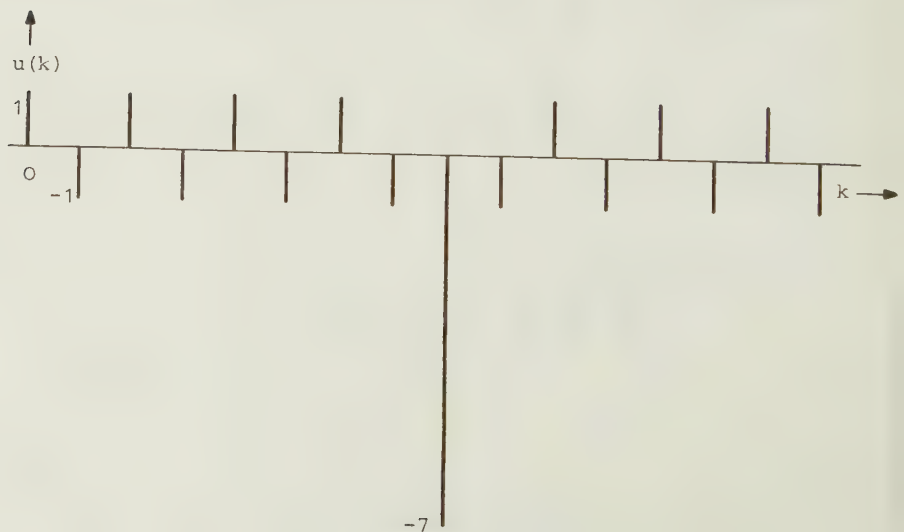
und eine orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $p = 16$; $R_u(0) = 64$, Phasen $\varphi(\mu)$ wählen.



Die errechnete Folge ist nachfolgend dargestellt (dreiwertig).



Auf weitere Beispiele muß in diesem Rahmen verzichtet werden.

5.3.2.3 Digitale Systemanalyse

Aus der Vielfalt der erzeugbaren orthogonalen Folgen $u(k)$ ist aufgrund der Tatsache, daß $|U(\mu)| = \text{const} \quad \forall \mu = O(1)(p-1)$ ist, eine Klasse von Signalen, bei denen die Segmentenergie möglichst gleichmäßig auf die einzelnen $u(k)$ verteilt auftritt, für die Systemanalyse digitaler Systeme interessant. Wird eine geeignete Folge $u(k)$ der Länge $p-1$ (p -Werte) mit p_k periodisch fortgesetzt, so ergibt sich das Testsignal $v(k)$, wobei gilt:

$v(k) = v(k-vp)$, $v \in \mathbb{Z}$. Im Spektralbereich treten im Abstand $\frac{2\pi}{p}$ gleichhohe Spektrallinien auf, ähnlich einem diskreten Rauschspektrum. Wird die Systemreaktion $y(k)$ der DFT der Länge p unterworfen, so lassen sich bei bekanntem $|U(\mu)|$ und bekannten Phasen $\varphi(\mu)$ des Testsignals $v(k)$ Betrag und Phase des Systems in den Punkten $\frac{2\pi}{p}\kappa$, $\kappa = O(1)(p-1)$ errechnen. Eine solche Anordnung zeigt das folgende Bild 5.23.

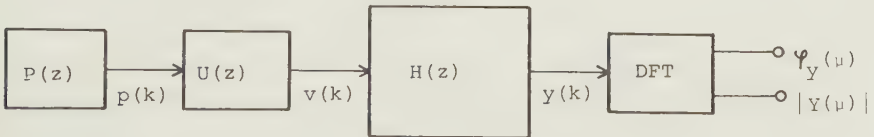


Bild 5.23 Zur Analyse des Systems $H(z)$

$P(z)$ repräsentiert einen Impulsgenerator, dessen Ausgangssignal

$$p(k) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_0(k-vp)$$

das nichtrekursive den Code $u(k)$ generierende System $U(z)$ speist. Bei bekannter Wahl der $\varphi(\mu)$ von $U(z)$ und Vorgabe des $\sqrt{R_0(0)} = |U(\mu)|$ ist das Testsignal $v(k)$ und damit $v(z) = Z\{v(k)\}$ vollständig bekannt.

Da für die Kaskade mit dem unbekannten System $H(z)$ gilt:

$$\begin{aligned} Y(z) &= V(z) \cdot H(z) \\ &= |V(z)| \cdot |H(z)| \cdot e^{j[\varphi_V(\omega) + \varphi_H(\omega)]} \end{aligned}$$

ergibt die DFT: $Y(z) = \text{DFT}\{y(k)\}$ die unbekannten Werte

$$H(\omega) = \frac{|Y(\omega)|}{\sqrt{R_O(0)}}; \quad \varphi_H(\omega) = \varphi_Y(\omega) - \varphi_V(\omega)$$

Da die DFT oft mit dem einer Zweierpotenz langen Blocklänge schnellen FFT-Algorithmus arbeitet, sind für diese Anwendung Orthogonalcodes mit der Länge $p = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ wichtig. Ein solcher Code für $p = 8$ wurde bereits durch Bild 5.22 vorgestellt. Ein weiteres Beispiel für $p = 16$ wird im folgenden Bild 5.24 gezeigt.

$p = 16$, $R_O(0) = 16$, $\varphi(\omega)$ geeignet wählen.

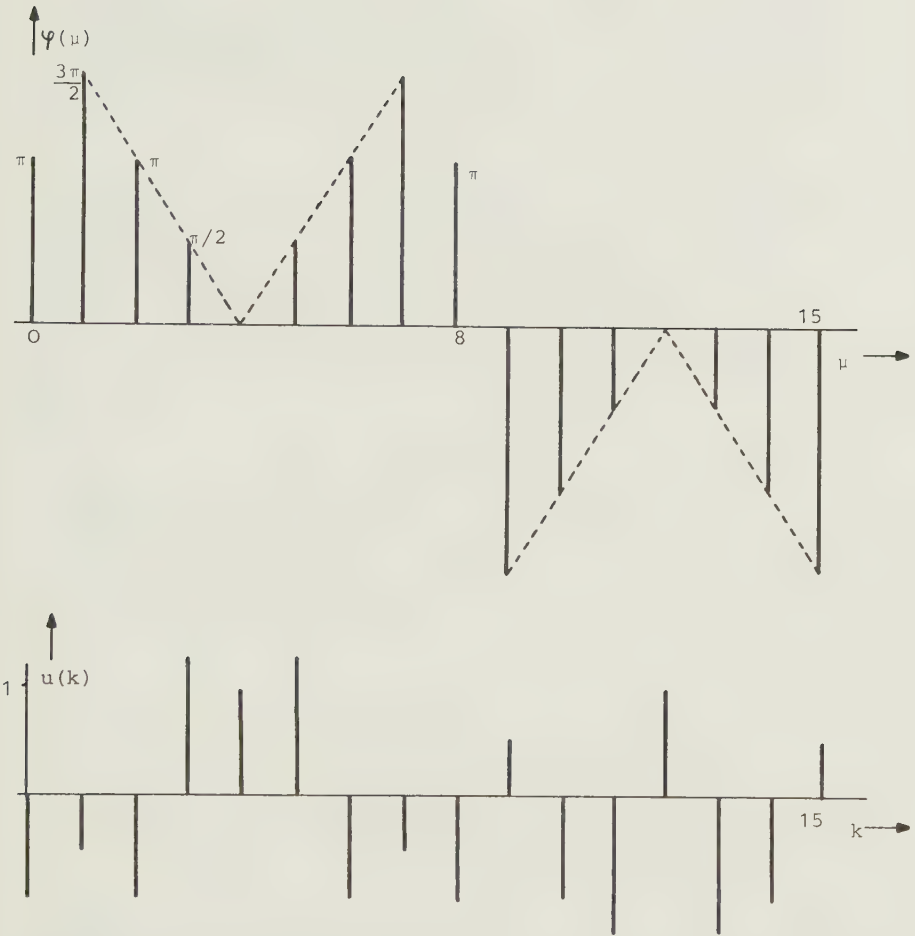


Bild 5.24 Ein für die Systemanalyse geeigneter Code der Länge $p = 16$

Es treten betragsmäßig nur 3 verschiedene Werte bei dieser Folge auf, die mit ihren prozentualen Energieanteilen, auf das Segment $u(k)$ bezogen, in Tabellenform aufgelistet sind.

k	$u(k)$	$\frac{u^2(k)}{R_0(0)}$
0	-1,0	6,25 %
1	-0,541196100	1,831 %
2	-1,0	6,25 %
3	1,306562965	10,669 %
4	1,0	6,25 %
5	1,306562965	10,669 %
6	-1,0	6,25 %
7	-0,541196100	1,831 %
8	-1,0	6,25 %
9	0,541196100	1,831 %
10	-1,0	6,25 %
11	-1,306562965	10,669 %
12	1,0	6,25 %
13	-1,306562965	10,669 %
14	-1,0	6,25 %
15	0,541196100	1,831 %

Gewünscht würden längere Folgen mit $p = 2^n$. Doch dieser Punkt ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Es sollte nur eine weitere Möglichkeit der Verwendung orthogonaler Funktionen $u(k)$ aufgezeigt werden.

angesetzt. Mit der definierten Steigung von $A(\epsilon)$ zu

$$\alpha \cdot \beta \cdot \left. \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = K_D \quad (6.1)$$

$$[K_D] = \frac{V}{\text{sec}}$$

läßt sich für kleine Zeitfehler aus Bild 6.1 ein äquivalentes Ersatzbild mit den transformierten Störgrößen am Korrelatorausgang angeben, Bild 6.2.

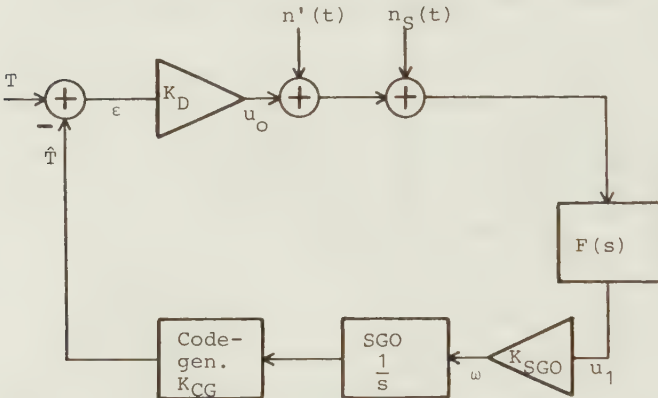


Bild 6.2 Linearisierter Regelkreis für die Zeitdifferenz ϵ

$n'(t)$ ist das transformierte Rauschen, welches nur durch seine Autokorrelierte $R_{n'}(t)$ bzw. durch das Leistungsdichtespektrum angebar ist, $n_s(t)$ korrespondiert mit dem in Kap. 4 definierten Störspektrum $X(j\omega) - X(0)$, da $X(0) = A(\epsilon)$ die Nutzkomponente im Regelkreis bedeutet. Diese Darstellung ist der beim PLL-Kreis gewohnten Betrachtungsweise sehr ähnlich. Der spannungsgesteuerte Oszillator wird als Spannungs-Frequenzwandler durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\omega = \omega_0 + K_{SGO} \cdot u_1$$

mit ω_0 als Ruhfrequenz und K_{SGO} als Oszillatorsteilheit. Für

die Phase gilt dann der übliche integrale Zusammenhang

$$\varphi = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [\omega_0 + K_{SGO} \cdot u_1(t)] dt$$

Werden nur Änderungen der Phase um die der Ruhfrequenz ω_0 zugeordneten Phase φ_0 betrachtet (differenzfrequente Darstellung), so gilt

$$\varphi_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^t K_{SGO} \cdot u_1(t) dt$$

Die entsprechende Laplace-Transformierte für die Beschreibung von dynamischen Änderungen lautet dann

$$\phi_{\Delta}(s) = K_{SGO} U_1(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Der Codegenerator kann im engeren Sinn als "Phasen-Zeitwandler" betrachtet werden. Erhöhung der Eingangsgröße φ_{Δ} (Voreilung) ergibt frühere Startpunkte des generierten Codes, d.h. positive Werte T . Somit wird eine Beschreibung mit

$$K_{CG} = \frac{\hat{T}(s)}{\phi_{\Delta}(s)}$$

möglich. Unter Beachtung der Einheiten der beiden Konstanten K_{SGO} und K_{CG} mit

$$[K_{SGO}] = \left[\frac{\phi_{\Delta} \cdot s}{U_1} \right] = \frac{1}{V_{sec}} \quad \text{und}$$

$$[K_{CG}] = \frac{\frac{sec}{1}}{1}$$

wird die Zusammenfassung beider Konstanten zu

$$K_O = K_{SGO} \cdot K_{CG} \quad (6.2)$$

$$|K_O| = \frac{1}{V}$$

definiert. Mit dem "differenzfrequenten" Blockschaltbild und den eben definierten Konstanten lassen sich die beiden wesentlichen Übertragungsfunktionen für das Führungsverhalten (Eingang T , Ausgang $\hat{T}$, Störungen $n(t) \equiv 0$) $G_F(s)$ und für das Störverhalten (Eingang $n'(t)$ bzw. $n_s(t)$, Ausgang $\hat{T} = -\epsilon$, $T = 0$) $G_S(s)$ bestimmen. Sie lauten:

$$G_F(s) = \frac{K_D \cdot K_O \cdot F(s) \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_D \cdot K_O \cdot F(s) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{\hat{T}(s)}{T(s)} \quad (6.3)$$

$$G_S(s) = \frac{K_O \cdot F(s) \cdot \frac{1}{s}}{1 + K_O \cdot K_D \cdot F(s) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{\hat{T}(s)}{\mathcal{L}\{n(t)\}} \quad (6.4)$$

Zwischen den beiden Übertragungsfunktionen besteht der einfache Zusammenhang:

$$G_S(s) = \frac{1}{K_D} \cdot G_F(s) \quad (6.5)$$

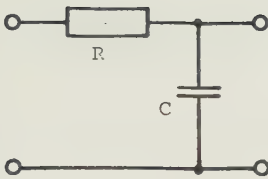
Zunächst wird das Führungsverhalten untersucht. Wie beim PLL s. [11] interessieren hier als mögliche Schleifenfilter $F(s)$ nur Filter 1. Ordnung in Form des "RC-Gliedes" oder des sogenannten "passiven PI-Gliedes" [12] als Tiefpaßfilter. Das RC-Glied hat eine Übertragungsfunktion der Form

$$F(s) = \frac{1}{T_F} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_F}} \quad (6.6)$$

mit T_F als Filterzeitkonstante. Ein passives PI-Glied kann durch

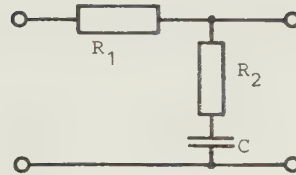
$$F(s) = \frac{1 + sT_F}{1 + s\frac{T_F}{m}} \quad (6.7)$$

mit m als Teilerfaktor angegeben werden. Bild 6.3 zeigt die beiden Filter in einer möglichen Ausführungsform mit Widerständen und einem Kondensator.



RC-Glied

$$T_F = R \cdot C$$



passives PI-Glied

$$T_F = R_2 \cdot C$$

$$m = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Bild 6.3 RC- und passives PI-Glied

Einsetzen der Gln. (6.6) bzw. (6.7) in die Übertragungsfunktion nach Gl. (6.3) ergibt das Führungsverhalten des geschlossenen Kreises. Für Verwendung eines RC-Gliedes als Schleifenfilter folgt dann mit der weiteren Zusammenfassung der Konstanten K_D und K_O zu

$$K_D \cdot K_O = \omega_s \quad (6.8)$$

$$[\omega_s] = \text{sec}^{-1}$$

die Führungsübertragungsfunktion des Kreises:

$$G_F(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_s} + \frac{s^2}{\omega_s^2} \cdot T_F} \quad (6.9a)$$

Mit der bei PLL-Schaltungen üblichen Normierung auf Eigenfrequenz

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\omega_s}{T_F}} \quad (6.9b)$$

und Dämpfung

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_s T_F}} \quad (6.9c)$$

läßt sich $G_F(s)$ in folgender normierter Form darstellen:

$$G_F(s) = \frac{1}{1 + 2D \cdot \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (6.9d)$$

Wird ein passives PI-Glied als $F(s)$ verwendet, so ergibt Einsetzen der zugehörigen Gl. (6.7) in Gl. (6.3) die Führungsübertragungsfunktion

$$G_F(s) = \frac{1 + sT_F}{1 + sT_F \left(1 + \frac{1}{\omega_s T_F}\right) + s^2 \frac{T_F}{\omega_s^2 m}} \quad (6.10a)$$

Um den Nenner auf die gleiche normierte Form mit Dämpfung D und Eigenfrequenz ω_0 wie in Gl. (6.9d) zu bringen, ist es erforderlich, zu setzen:

$$\text{Eigenfrequenz} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_s^2 \cdot m}{T_F}} \quad (6.10b)$$

$$\text{Dämpfung} \quad D = \frac{\sqrt{\omega_s \cdot m \cdot T_F}}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_s T_F}\right) \quad (6.10c)$$

Damit ergibt sich das normierte $G_F(s)$ zu

$$G_F(s) = \frac{1 + sT_F}{1 + 2D \cdot \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (6.10d)$$

In normierter Form sind die Nennerpolynome für die beiden Schleifenfilter gleich, allerdings bei verschiedenen Parametern des Regelkreises. Die Übertragungsfunktion des Kreises mit PI-Schleifenfiltern weist zusätzlich eine negativ reelle Nullstelle auf. Ist der DLL im synchronisierten Zustand und tritt bei weiß angenommener Rauschstörung eine lineare zeitliche Änderung $T(t) = |T| \cdot \delta_{-2}(t)$ auf, so ergibt sich wie beim PLL s. [11] ein annähernd optimales Verhalten für das Einschwingen von $\hat{T}(t)$ bei

Verwendung eines passiven PI-Gliedes als Schleifenfilter mit der Dimensionierung

$$\left. \begin{aligned} D_{\text{opt}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad K_{\text{opt}} = 2 = m \cdot \omega_s T_F \\ \text{und} \quad \omega_s T_F &> 1 \\ m &= \frac{K_{\text{opt}}}{\omega_s T_F} = \frac{2}{\omega_s T_F} < 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Für beide Schleifenfiltertypen beträgt die Regelabweichung im eingeschwungenen Zustand nach einem Sprung der Eingangsgröße wegen des integralen Anteiles im Regelkreis $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}(t) = T$, d.h.

$\varepsilon(t) \rightarrow 0$ wie durch Anwendung des Endwertsatzes für die Laplace-Transformation zu sehen ist.

$$T(s) = |T| \cdot \frac{1}{s}$$

$$\hat{T}(s) = G_F(s) \cdot T(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{T}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{T}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_F(s) \cdot |T| = |T| \quad (6.12)$$

Alle weiteren Betrachtungen bezüglich des Führungsverhaltens im ungestörten Zustand entsprechen genau den Verhältnissen beim PLL, es wird auf die einschlägige Literatur verwiesen, [11], [43], [44]. Schwieriger wird die Beschreibung des Störverhaltens bei additiver Einwirkung von weißem Rauschen $n(t)$ auf das Empfangssignal. Beim PLL bleibt das hinter den Korrelator transformierte Rauschen weiß, s. [55], ebenso bei Verwendung der Verzögerungskorrelatoren beim DLL (wie schon gezeigt wurde im Kap. 3.4.4). Werden Korrelatoren mit realisierbaren analogen Filtern verwendet, so ist das am Ausgang des Korrelators liegende transformierte Rauschen farbig, es muß ein neuer Berechnungsansatz formuliert werden.

6.2 Bestimmung der Varianz des Zeitverzögerungsfehlers bei linearisierter Kennlinie $A(\varepsilon)$

6.2.1 Allgemeine Beziehungen

Die durch das Multiplikationsrauschen hervorgerufenen Störungen $n_s(t)$ werden zu Null gesetzt, es wird nur der Einfluß von weißem Rauschen $n(t)$ auf den Empfängerzweig behandelt. Dieses Rauschen erscheint transformiert am Korrelatorausgang mit $n'(t)$. Da es eine statistische Größe darstellt, kann der weitere Störeinfluß auf den geschlossenen Kreis nur im Bereich von Korrelationsfunktionen bzw. Leistungsdichtespektren erfolgen. Entsprechend dem Blockschaltbild 6.2 ergibt sich für $s = j\omega$ aus der Gl. (6.4), welche die Störübertragungsfunktion beschreibt:

$$G_s(j\omega) = \frac{\hat{T}(j\omega)}{\mathcal{F}\{n'(t)\}}$$

Nach Übergang auf den Leistungsdichtebereich gilt also

$$G_s(j\omega) \cdot G_s^*(j\omega) = |G_s(\omega)|^2 = \frac{S_{\hat{T}}(\omega)}{S_{n'}(\omega)} \quad (6.13a)$$

bzw.

$$S_{\hat{T}}(\omega) = S_{n'}(\omega) \cdot |G_s(\omega)|^2 \quad (6.13b)$$

Fouriertransformation der letzten Beziehung ergibt eine entsprechende Aussage für die Korrelationsfunktionen.

$$R_{\hat{T}}(\tau) = R_{n'}(\tau) * \mathcal{F}^{-1} \{ |G_s(\omega)|^2 \} \quad (6.14)$$

Die AKF $R_{\hat{T}}(\tau)$ für $\tau = 0$ liefert die Varianz $\sigma_{\hat{T}}^2$ des Zeitfehlers in $\hat{T}$. Mit der AKF $R_g(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ |G_s(\omega)|^2 \}$ läßt sich $\sigma_{\hat{T}}^2$ aus Gl. (6.14) durch das Faltungsintegral am günstigsten berechnen.

$$R_{\hat{T}}(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_n(t) \cdot R_g(\tau-t) dt \Big|_{\tau=0}$$

Unter Berücksichtigung der geraden Eigenschaft von $R_g(\tau)$ ergibt sich

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = 2 \int_0^{\infty} R_n(t) \cdot R_g(t) dt \quad (6.15)$$

sofern $R_n(t)$ und $R_g(t)$ keinen $\delta_0(t)$ -Anteil besitzt. Ist das transformierte Rauschen weiß, wie es beim PLL und bei den "1 bzw. 2- T_c "-Korrelatoren der Fall ist, vereinfacht sich die Beziehung (6.15) in folgender Form: $R_n(t) = K \cdot N_0 \cdot \delta_0(t)$ mit $K = 2$ für den "1- und 2 T_c "-DLL (s. Gl. (3.64a)). Damit läßt sich die Varianz des Zeitfehlers bestimmen zu:

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = 4 \cdot N_0 \int_0^{\infty} \delta_0(t) \cdot R_g(t) dt = 2 \cdot N_0 \cdot R_g(0) \quad (6.15a)$$

Nun ist andererseits

$$R_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_S(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

und speziell für $t = 0$ folgt:

$$R_g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_S(\omega)|^2 d\omega \stackrel{!}{=} f_R \cdot \frac{2}{K_D} \quad (6.16)$$

Die Größe f_R ist beim PLL als Rauschbandbreite bekannt. Für diesen Fall errechnet sich die Varianz

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = N_0 \cdot 2 \cdot f_R \cdot \frac{2}{K_D} \quad (6.17)$$

Um später einen Vergleich der Varianz des Zeitfehlers bei verschiedenen Korrelatortypen möglich zu machen, ist es erforderlich, die AKF $R_g(\tau)$ des geschlossenen Kreises für die beiden Fälle eines RC- und eines passiven PI-Schleifenfilters zu be-

rechnen. Für das RC-Schleifenfilter $F(j\omega)$ erhält man die Störübertragungsfunktion in normierter Darstellung mit der Dämpfung

$$D = \cos \vartheta = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_D \cdot K_O \cdot T_F}} \quad (6.18a)$$

und der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_D \cdot K_O}{T_F}} \quad (6.18b)$$

nach Gln. (6.5) und (6.9d) mit $s = j\omega$ zu

$$G_S(j\omega) = \frac{1}{K_D} \cdot \frac{1}{1 + 2D j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (6.18c)$$

Das zugehörige PN-Diagramm ist in Bild 6.4 gezeigt.

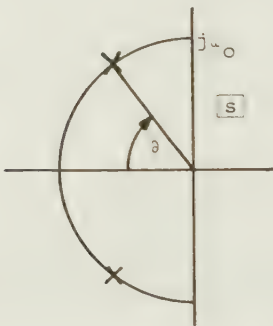


Bild 6.4 PN-Diagramm des geschlossenen Kreises mit RC-Schleifenfilter

Das Betragsquadrat der Störübertragungsfunktion errechnet sich mit $G_S(j\omega) \cdot G_S^*(j\omega)$ zu

$$|G_S(\omega)|^2 = \frac{\omega_o^4}{K_D^2} \cdot \frac{1}{\omega^4 + 2\omega_o^2 \frac{\omega}{\omega_o} \cos 2\vartheta + \omega_o^4} \quad (6.18d)$$

Die Rücktransformierte wird mit [52] nach einigen Umformungen für positive t erhalten zu:

$$R_g(t) = \frac{\omega_o}{2 K_D^2 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot e^{-\omega_o t \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_o t \cdot \sin \vartheta) \quad (6.18e)$$

Es ist eine in t gerade Funktion. Für die bei PLL-Schaltungen übliche Rauschbandbreite

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |G_F(\omega)|^2 d\omega \quad (6.18f)$$

erhält man aus der Gl. (6.18e) durch Multiplikation mit $\frac{K_D^2}{2}$ (Unterschied von G_F zu G_S und untere Integralgrenze 0) den Wert f_R durch Nullsetzen von t zu

$$f_R = \frac{\omega_s}{4} \quad (6.18g)$$

was die Richtigkeit der Gl. (6.18e) zeigt.

Wird ein passives PI-Glied nach Gl. (6.7) als Schleifenfilter verwendet, so lautet mit den Gln. (6.5) und (6.10d) die Störübertragungsfunktion und deren Betragsquadrat für $s = j\omega$

$$G_S(j\omega) = \frac{1}{K_D} \cdot \frac{1 + j \omega T_F}{1 + 2D j \frac{\omega}{\omega_o} - (\frac{\omega}{\omega_o})^2} \quad (6.19a)$$

$$|G_S(\omega)|^2 = \frac{\omega_o^4}{K_D^2} \cdot \frac{1 + (\omega T_F)^2}{\omega^4 + 2\omega_o^2 \frac{\omega}{\omega_o} \cos 2\vartheta + \omega_o^4} \quad (6.19b)$$

Im Gegensatz zur PN-Darstellung von $G_S(s)$ beim RC-Filter, s. Bild 6.4, ist also zusätzlich eine negativ reelle Nullstelle vorhanden. Die Normierungsgrößen D und ω_o werden durch die Gln. (6.10b) und (6.10c) bestimmt. Rücktransformation von (6.19b) geschieht wieder mit der Tabelle [52] und einigen Umformungen. Es ergibt sich

für positive t

$$R_g(t) = \frac{\omega_o \cdot e^{-\omega_o t \cos \vartheta}}{2 \cdot K_D^2 \cdot \sin 2\vartheta} \left\{ \sin(\vartheta + \omega_o t \cdot \sin \vartheta) + (\omega_o T_F)^2 \cdot \sin(\vartheta - \omega_o t \sin \vartheta) \right\} \quad (6.19c)$$

Auch hier läßt sich durch Nullsetzen von t das vom PLL bekannte Ergebnis für die Rauschbandbreite errechnen.

$$\begin{aligned} R_g(0) &= \frac{\omega_o}{2 K_D^2 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot \{ [1 + (\omega_o T_F)^2] \cdot \sin \vartheta \} \\ &= \frac{\omega_o (1 + \omega_o^2 T_F^2)}{2 K_D^2 \cdot 2D} = \frac{\omega_o (1 + \omega_o^2 T_F^2)}{2 K_D^2 \cdot \sqrt{\omega_S m T_F} \left(1 + \frac{1}{\omega_S T_F}\right)} \end{aligned} \quad (6.19d)$$

Durch Einsetzen der Bestimmungsgleichungen für D und ω_o (6.10b und c) folgt weiter

$$\begin{aligned} R_g(0) &= \frac{1}{2K_D^2} \cdot \sqrt{\frac{\omega_S \cdot m}{T_F \omega_S \cdot m T_F}} \cdot \frac{(1 + T_F^2 \frac{\omega_S \cdot m}{T_F})}{\frac{1}{\omega_S T_F} (1 + \omega_S T_F)} \\ &= \frac{1}{2K_D^2} \cdot \omega_S \cdot \frac{1 + m \cdot \omega_S \cdot T_F}{1 + \omega_S T_F} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Das ist bis auf den Faktor $\frac{K_D^2}{2}$ die Rauschbandbreite f_R des PLL für ein passives PI-Glied als Schleifenfilter.

6.2.2 Der "1-T_C"-DLL

Bei Einsatz eines "1-T_C"-Korrelators, s. Kap. 3.4.4, sind Ergebnisse für die Varianz des Zeitfehlers ausführlich in der Literatur z.B. in [12] behandelt. Die dort präsentierten Ergebnisse bestätigen die in dieser Arbeit getroffenen Ansätze für die Transformation des Rauscheinflusses hinter dem Diskriminator bei einer linearisierten Kennlinie A(ε). Für den Fall nicht bandbegrenzter Empfangssignale kann die Varianz $\sigma_{\hat{T}}^2$ mit den Gln. (3.64a), (6.1), (6.15a) und (6.16) angegeben werden zu

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{T}}^2 &= 2 N_O \cdot R_g(0) \\ &= \frac{2 N_O}{\left[\alpha \cdot \beta \cdot \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right]^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_F(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Unter weiterer Berücksichtigung von (6.18f,g) gilt somit:

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = \frac{N_O \cdot 4}{\left[\alpha \cdot \beta \cdot \frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} \right]^2} \cdot f_R \quad (6.21)$$

mit der beim PLL üblichen Rauschbandbreite f_R .

Normierung auf die Taktfrequenz f_C der Referenzfolgen und Einsetzen von

$$K_D^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{T_C^2} \quad (\text{s. Bild 2.15 für } p \gg 1)$$

führt auf:

$$\frac{\sigma_{\hat{T}}^2 \cdot (\alpha \cdot \beta)^2}{N_O \cdot T_C} = \frac{f_R}{f_C} \quad (6.22)$$

Für $\beta = 1$ (Referenzamplitude), $\alpha = a$ und $f_R = B_n$ ergibt sich aus dieser Beziehung unmittelbar die Gl. (2.9).

Die Varianz des Zeitfehlers steigt also linear mit dem Verhältnis $\frac{f_R}{f_C}$ und ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Empfangssignalamplitude α , wobei die Referenzamplitude β als konstant und dimensionslos betrachtet wird (Technische Multiplikation zweier Spannungen ergibt wieder eine Spannung).

Es wird hier nicht auf die erforderlichen Kreisparameter ω_0 und ϑ eingegangen, die zur Einstellung der angenommenen Rauschbandbreiten f_R dienen, vielmehr ist die auf $\frac{f_R}{f_C}$ bezogene Darstellung gewählt worden, um später einen anschaulichen Vergleich mit den analogen Korrelatoren vornehmen zu können. Bei dem zu betrachtenden Bereich, $0,02 \leq \frac{f_R}{f_C} \leq 2,56$ dürften die für eine Implementierung wesentlichen Werte der Rauschbandbreite erfaßt sein, wobei der obere Wertebereich wegen der auftretenden Taktfrequenzstörungen bei f_C und $2f_C$ (s. Kap. 4) nur von theoretischem Interesse ist.

6.2.3 Das Allpaßmodell

Wird ein mit Allpässen versehener Korrelator verwendet, so sind, da jetzt der Verlauf von $R_g(t)$ (also nicht nur der Wert bei $t=0$) für die Varianz σ_T^2 eine Rolle spielt, die beiden Fälle des Regelkreises, nämlich für RC- und für passives PI-Glied, getrennt zu behandeln. Mit den Gln. (6.15), (3.58) und (6.18e) läßt sich σ_T^2 ausdrücken:

$$\sigma_T^2 = 2 \cdot \int_0^\infty R_n(t) \cdot R_g(t) dt$$

Für ein RC-Schleifenfilter gilt:

$$\sigma_T^2 = \frac{8 N_0}{T} \cdot \frac{\omega_0}{2K_D \cdot \sin 2\vartheta} \cdot \int_0^{T_C} |e^{-t/T} (1 - \frac{t}{T}) \cdot (1 - \frac{t}{T_C}) \cdot e^{-j\omega_0 t \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_0 t \cdot \sin \vartheta)| dt$$

Die obere Integralgrenze reduziert sich wegen des Gültigkeitsbereiches von $R_N(\tau)$ zu T_C . Erweiterung der von t abhängigen Terme mit T_C und Verwendung von den in den vorigen Kapiteln definierten Abkürzungen führt mit der Substitution $\frac{t}{T_C} = y$ auf:

$$\sigma_T^2 = \frac{8 N_O \cdot \omega_O T_C}{2 K_D^2 \cdot T \cdot \sin 2\vartheta} \int_0^1 e^{-Y \cdot b \cdot (1-yb)(1-y)} \cdot e^{-\omega_O T_C \cdot Y \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_O T_C \cdot Y \cdot \sin \vartheta) dy$$

Mit den Gln. (3.20c) (Faktor 4 in einem Filterzweig) und (6.1) läßt sich mit den Definitionen $\omega_O T_C = c$ und $\frac{T_C}{T} = b$ weiter schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \frac{8 \cdot N_O \cdot c \cdot T_C \cdot b}{2 \cdot (\alpha \cdot \beta)^2 \cdot 16 (1-e^{-b})^2 \cdot \sin 2\vartheta} \int_0^1 e^{-yb(1-yb)(1-y)} \cdot e^{-cy \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + cy \cdot \sin \vartheta) \cdot dy \\ \frac{\sigma_T^2 (\alpha \cdot \beta)^2}{N_O \cdot T_C} &= \frac{4 \cdot b}{16 (1-e^{-b})^2} \int_0^1 [e^{-yb(1-yb)(1-y)} \cdot |c \frac{e^{-cy \cdot \cos \vartheta}}{\sin 2\vartheta} \cdot \sin(\vartheta + cy \cdot \sin \vartheta)| dy \quad (6.23) \\ &= \frac{4b}{16 (1-e^{-b})^2} \int_0^1 f_1(y) \cdot f_{21}(y) dy \end{aligned}$$

Aus den Gln. (6.9b) und (6.9c) läßt sich finden:

$$\frac{\omega_O}{D} = \sqrt{\frac{\omega_S}{T_F} \cdot \omega_S T_F} \cdot 2 = 2 \cdot \omega_S$$

und durch Einführen der Rauschbandbreite f_R ergibt sich nach Normierung auf die Taktfrequenz

$$c = \omega_O T_C = 8 D \cdot \frac{f_R}{f_C} \quad (6.24)$$

Für den Fall eines maximal flachen Frequenzganges der Übertragungsfunktion $G_F(j\omega)$ des geschlossenen Kreises, d.h. $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\vartheta = 45^\circ$ zeigt das folgende Bild 6.5 den Verlauf von $f_{21}(y)$. Diese Funktion ist also direkt proportional zu $R_g(t)$ bei Einsatz eines RC-Schleifenfilters.

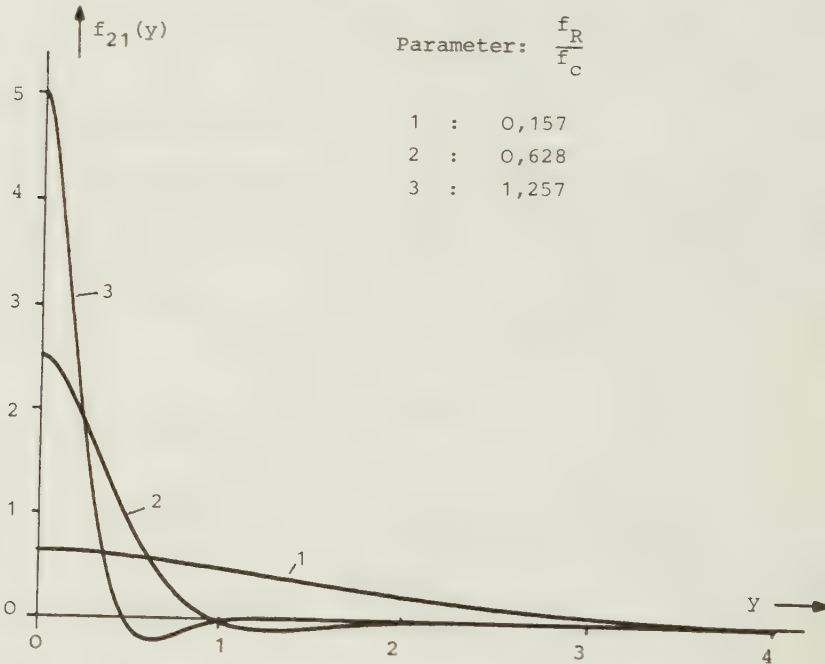


Bild 6.5 $f_{21}(y)$ für RC-Schleifenfilter bei $\vartheta = 45^\circ$

Durch numerische Integration (Simpson) mit 200 Stützstellen für $0 \leq y \leq 1$ und $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erfolgte die Auswertung der Gl. (6.23).

Dabei wurde zusätzlich die Allpaßzeitkonstante variiert zu $b = \frac{T_C}{T} = 1; 1,5; 1,8107; 2,5$.

In Bild 6.6 ist die erreichte Verbesserung der Varianz des Zeitfehlers vom Allpaß-Korrelator gegenüber dem " $1-T_C$ "-Modell aufgetragen. Die korrespondierenden Werte sind durch

$$a = 10 \lg \frac{(\hat{\sigma}_T^2)_{1-T_C}}{(\hat{\sigma}_T^2)_{\text{Allp.}}}$$

verglichen für $0,02 \leq \frac{f_R}{f_C} \leq 2,56$ und verschiedene Werte

$b = \frac{T_C}{T}$ als Parameter.

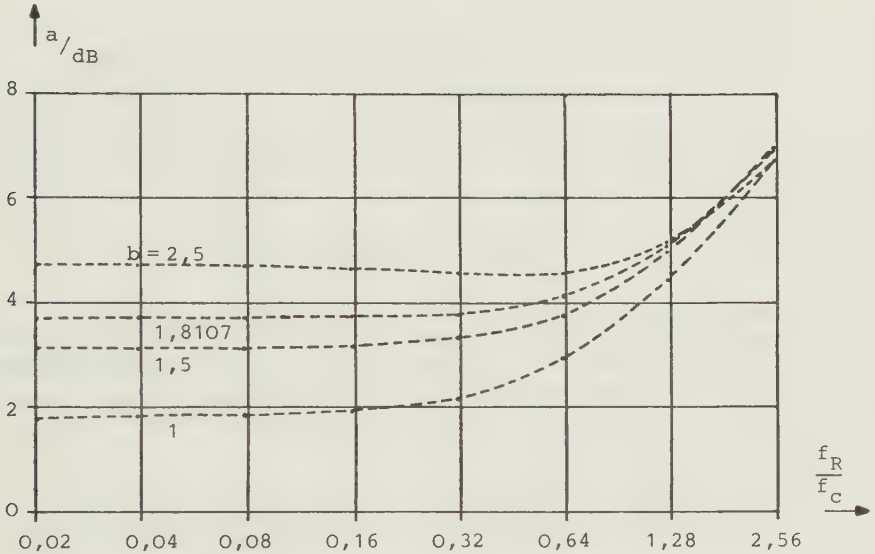


Bild 6.6 Verbesserung der Varianz des Zeitfehlers beim Allpaß-Korrelator mit RC-Schleifenfilter ($D = 1/\sqrt{2}$) gegenüber dem "1- T_C "-Korrelator ($\hat{\sigma}_T^2 \sim \frac{f_R}{f_C}$).

Offenbar läßt sich bei geringfügigem Verzicht auf maximale Amplitude der Regelkennlinie $A(\varepsilon)$ (etwa -3,5% Verlust für $b = \frac{T_C}{T} = 2,5$) im gesamten betrachteten Bereich $\frac{f_R}{f_C}$ mit dem Allpaß-Korrelator eine Verkleinerung der Varianz des Zeitfehlers um mindestens 4 dB erreichen.

Bei Einsatz eines passiven PI-Gliedes als Schleifenfilter $F(j\omega)$ gilt für $R_g(t)$ die Gl. (6.19c) und als spezielle Form für $t = 0$ ergab sich durch Beachtung der multiplikativen

Konstanten die Rauschbandbreite f_R zu

$$f_R = \frac{\omega_S}{4} \frac{1 + m \cdot \omega_S T_F}{1 + \omega_S T_F} \quad (6.25)$$

Die Varianz des Zeitverzögerungsfehlers errechnet sich mit dem Integral (6.15) folgendermaßen:

$$\sigma_{\hat{T}}^2 = \frac{8 N_O}{T} \frac{\omega_O}{2 K_D^2 \cdot \sin 2\vartheta_O} \int_0^{T_C} \left[e^{-t/T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{t}{T_C}\right) \right] \cdot$$

$$\left[\cdot e^{-\omega_O t \cdot \cos \vartheta} \langle \sin(\vartheta + \omega_O t \cdot \sin \vartheta) \right.$$

$$\left. + (\omega_O T_F)^2 \cdot \sin(\vartheta - \omega_O t \cdot \sin \vartheta) \rangle \right] dt$$

Normierung auf $\frac{1}{f_C} = T_C$ führt unter Verwendung der gleichen Konstanten, wie sie zur Herleitung der Gl. (6.23) benutzt wurden, nach der Substitution $\frac{t}{T_C} = y$ zu den folgenden Beziehungen:

$$\frac{\sigma_{\hat{T}}^2 (\alpha \cdot \beta)^2}{N_O T_C} = \frac{4 \cdot b}{16(1-e^{-b})^2} \int_0^1 [e^{-yb} (1-yb) (1-y)] \cdot$$

$$\left[\frac{c \cdot e^{-cy \cos \vartheta}}{\sin 2\vartheta} \langle \sin(\vartheta + cy \cdot \sin \vartheta) + (\omega_O T_F)^2 \sin(\vartheta - cy \cdot \sin \vartheta) \rangle \right] dy$$

$$= \frac{4b}{16(1-e^{-b})^2} \int_0^1 f_1(y) \cdot f_{22}(y) dy \quad (6.26)$$

Um eine spezielle Aussage über die vorkommenden Größen $c = \omega_O T_C$ und $\omega_O T_F$ machen zu können, wird ein vom PLL her bekanntes annähernd optimales passives PI-Glied mit $m = 0,1$; $K = m \cdot \omega_S T_F = 2$ und $D \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ angenommen. Wird die Gl. (6.25) auf die Taktfrequenz

$f_C = \frac{1}{T_C}$ des Referenzcodes normiert, so gilt:

$$\frac{f_R}{f_C} = \frac{\omega_S \cdot T_C}{4} \cdot \frac{1 + m\omega_S T_F}{1 + \omega_S T_F}$$

Daraus läßt sich $\omega_S T_C = 4 \cdot \frac{f_R}{f_C} \cdot \frac{1 + \omega_S T_F}{1 + m\omega_S T_F}$ angeben.

Mit den Gln. (6.10b und c) ergibt sich:

$$\omega_O \cdot D = \frac{1}{2} m \cdot \omega_S \left(1 + \frac{1}{\omega_S T_F}\right)$$

Diese Beziehung wird nach ω_O umgestellt, mit T_C multipliziert, und für $\omega_S T_C$ wird der von der Rauschbandbreite abgeleitete Ausdruck eingesetzt.

$$\omega_O T_C = \frac{m \cdot 4}{2D} \cdot \frac{(1 + \omega_S T_F)^2}{(1 + m\omega_S T_F) \omega_S T_F} \cdot \frac{f_R}{f_C} \quad (6.27a)$$

Durch Multiplikation der Gl. (6.10b) mit T_F gewinnt man einen Ausdruck für $\omega_O T_F$

$$\omega_O T_F = \sqrt{m \cdot \omega_S T_F} \quad (6.27b)$$

Für die angenommenen Werte gilt dann:

$$\left. \begin{aligned} \omega_O T_C &= 2,078893938 \cdot \frac{f_R}{f_C} \\ \omega_O T_F &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (6.27c)$$

Das folgende Bild 6.7 zeigt hierfür den Verlauf von $f_{22}(y)$, welches proportional zu $R_g(t)$ mit passivem PI-Glied im Regelkreis ist.

Mit den angenommenen Größen für einen Regelkreis mit passivem PI-Glied wurde die Gl. (6.26) für den gleichen Bereich $\frac{f_R}{f_C}$ mit b als Parameter wie beim RC-Schleifenfilter numerisch ausgewertet. Werden die erhaltenen Ergebnisse wieder auf die vom "1- T_C "-Korrelator bekannten Werte bezogen, so ergeben sich auch hier für das Allpaßmodell Verbesserungen bezüglich der Varianz.

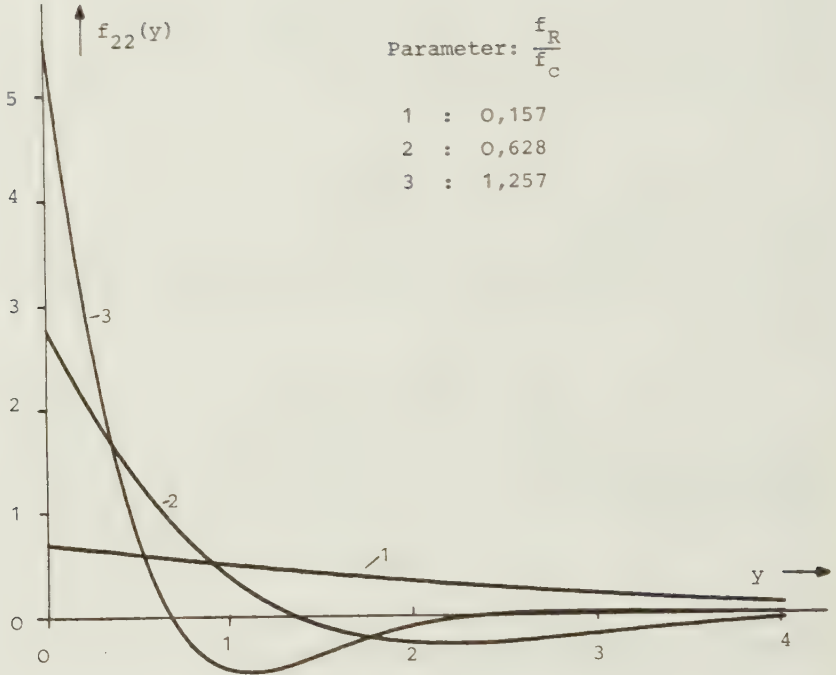


Bild 6.7 $f_{22}(y)$ für ein passives PI-Glied als Schleifenfilter mit $m = 0,1$, $\vartheta = 45^\circ$, $m \cdot \omega_S \cdot T_F = 2$

Das folgende Bild 6.8 zeigt die Abhängigkeit der erzielbaren Werte vom Verhältnis $\frac{f_R}{f_C}$ mit $b = \frac{T_C}{T}$ als Parameter.

Beim "1- T_C "-Korrelator gilt nach Gl. (6.22) $\sigma_T^2 \sim \frac{f_R}{f_C}$. Auch in diesem betrachteten Fall ergeben sich für $b \geq 1,8107$ Verbesserungen um etwa 4 dB oder mehr gegenüber dem "1- T_C "-Modell.

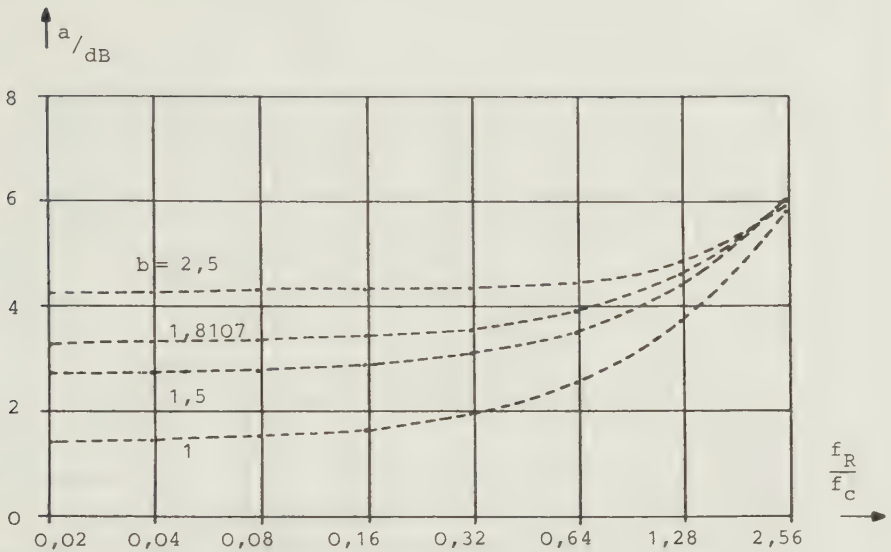


Bild 6.8 Verbesserung der Varianz des Zeitfehlers beim Allpaß-Korrelator mit passivem PI-Schleifenfilter für $D = 1/\sqrt{2}$ gegenüber dem "1- T_C "-Korrelator.

Die Bereiche von $\frac{f_R}{f_C}$ für den Allpaßkorrelator mit beiden betrachteten Schleifenfiltern, bei denen a stärker ansteigt ($0,64 \leq \frac{f_R}{f_C} \leq 2,56$), sind für eine Realisierung leider nicht relevant, weil sich dann zunehmend die Taktstörungen des Multipliziererrauschens auswirken würden (Kap. 4).

6.2.4 Der RC-Korrelator

Bei Einsatz eines mit RC-Filterpaar ausgerüstetem Korrelators mit einer zusätzlichen Verstärkung von 4 in einem Zweig ergibt sich der gleiche Verlauf $A(\epsilon)$ der Regelkennlinie, wie bereits früher gezeigt wurde. Von dieser Voraussetzung ausgehend, läßt sich mit den Gln. (6.15), (3.51) und (6.18e) die Varianz σ_T^2

bei einem RC-Filter im Regelkreis folgendermaßen berechnen.

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{T}}^2 = \frac{16 N_O}{T_C} \cdot \left\{ \int_0^{T_C} \left[e^{-\frac{2t}{T_C}} \left(1 - \frac{e^{-\frac{T_C}{T_C}}}{2} \right) - \frac{e^{-\frac{T_C}{T_C}}}{2} \right] \cdot \left[\frac{\omega_O}{2K_D^2 \cdot \sin 2\vartheta} \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\omega_O t \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_O t \cdot \sin \vartheta) \right] dt + \int_{T_C}^{\infty} \left[e^{-\frac{2t}{T_C}} \left(1 - \cosh \frac{T_C}{T_C} \right) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{\omega_O}{2K_D^2 \sin 2\vartheta} \cdot e^{-\omega_O t \cos \vartheta} \cdot \sin(\vartheta + \omega_O t \cdot \sin \vartheta) \right] dt \right\} \end{aligned}$$

Da der 1. Term im 2. Integral bereits bei $t = 4T_C$ im ungünstigsten Fall für $\frac{T_C}{T} = 1$ auf $1,82 \cdot 10^{-4}$ abgeklungen ist, s. auch Bild 3.37a, kann die obere Integralgrenze mit genügender Genauigkeit von " ∞ " auf $4T_C$ reduziert werden. Mit $\omega_O T_C = c$, $\frac{T_C}{T} = b$ und der Substitution $\frac{t}{T_C} = y$ erhält man mit der mit 4 multiplizierten Gl. (3.20c) mit $\left. \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0}$ für die normierte Varianz:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\hat{T}}^2 \cdot (\alpha \cdot g)^2}{N_O \cdot T_C} &= \frac{8}{16(1-e^{-b})^2} \cdot \left\{ \int_0^1 \left[e^{-2by} \left(1 - \frac{e^{-b}}{2} \right) - \frac{e^{-b}}{2} \right] \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{c \cdot e^{-cy \cos \vartheta}}{\sin 2\vartheta} \cdot \sin(\vartheta + cy \cdot \sin \vartheta) \right] dy + \\ &\quad \left. + \int_1^4 \left[e^{-2by} (1 - \cosh b) \right] \cdot \left[\frac{c \cdot e^{-cy \cdot \cos \vartheta}}{\sin 2\vartheta} \cdot \sin(\vartheta + cy \cdot \sin \vartheta) \right] dy \right\} \\ &= \frac{8}{16(1-e^{-b})^2} \cdot \left\{ \int_0^1 f_{11}(y) \cdot f_{21}(y) dy + \int_1^4 f_{12}(y) \cdot f_{21}(y) dy \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die Funktion $f_{21}(y)$ entspricht dabei der bereits in Gl. (6.23) verwendeten Beziehung, sie ist in Bild 6.5 dargestellt. Für den

maximal flachen Frequenzgang des geschlossenen Kreises mit $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ wurde die Gl. (6.28) mit 800 Stützstellen für die Integration numerisch ausgewertet und auf die entsprechenden Werte des "1- T_C "-Modelles bezogen. Die erzielbaren Verbesserungen für die Varianz des Zeitfehlers sind im folgenden Bild 6.9 dargestellt (Parameter ist $b = \frac{T_C}{T}$).

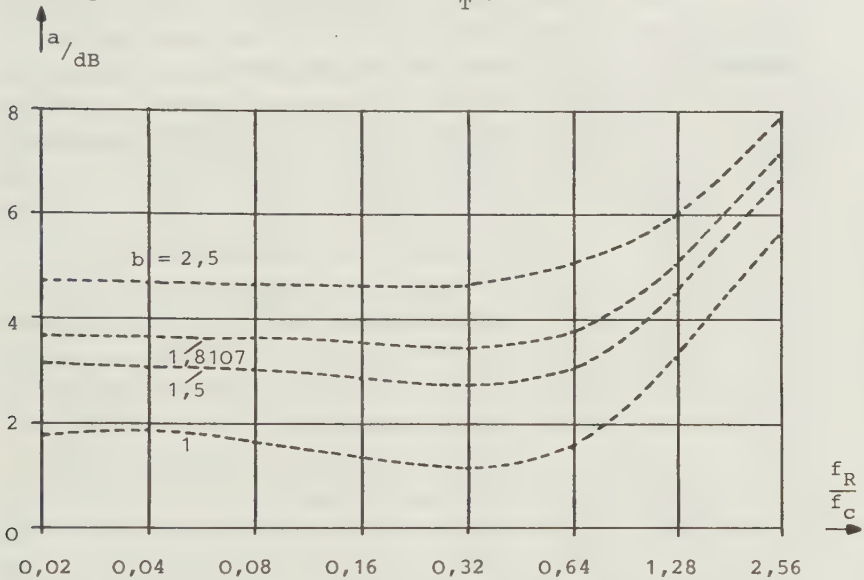


Bild 6.9 Verbesserung der Varianz des Zeitfehlers beim RC-Korrelator mit RC-Schleifenfilter gegenüber dem "1- T_C "-Korrelator ($D = 1/\sqrt{2}$).

Abhängig vom Verhältnis Rauschbandbreite f_R zur Taktfrequenz f_C des Referenzcodes ist durch Vergleich der Bilder 6.6 und 6.9 zu ersehen, daß einmal der RC-Korrelator, das andere Mal der Allpaß-Korrelator die größeren Verbesserungen bei der Varianz des Zeitfehlers σ_T^2 erreicht. Die Minima im Bild 6.9 sind dadurch zu erklären, daß mit wachsendem Verhältnis $\frac{f_R}{f_C}$ das Maximum von $S_n(\omega) = \mathcal{F}\{R_n(\tau)\}$ erreicht und dann überschritten wird, s. auch Bild 3.37b. Schließt die Rauschbandbreite das Maximum von $S_n(\omega)$ ein, so sind die mit einem RC-

Korrelator erzielbaren Verbesserungen bei der Varianz des Zeitfehlers für $b > 1,5$ höher als beim Allpaß-Korrelator.

Wird ein passives PI-Glied als Schleifenfilter verwendet, so gilt für die Berechnung der normierten Varianz ebenfalls die Gl. (6.28) mit der Änderung, daß statt $f_{21}(y)$ die Funktion $f_{22}(y)$ in den Integralen einzusetzen ist. Mit den gleichen Annahmen für m , β , $\omega_0 T_F$ wie beim Allpaßkorrelator für die Parameter der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises ergeben sich die auf die Werte des "1- T_C "-Modelles bezogenen in Bild 6.10 dargestellten Verbesserungen mit $b = \frac{T_C}{T}$ als Parameter.

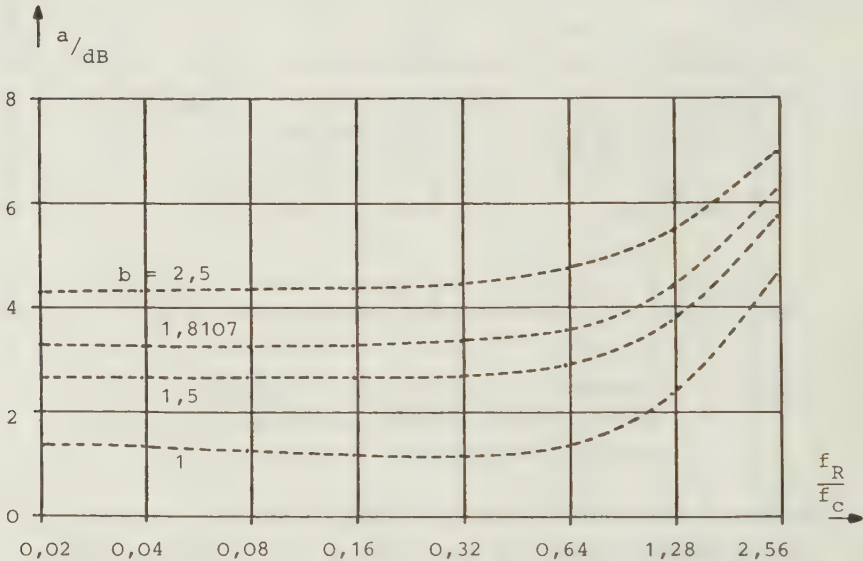


Bild 6.10 Verbesserung der Varianz des Zeitfehlers beim RC-Korrelator mit passivem PI-Schleifenfilter gegenüber dem "1- T_C "-Korrelator ($D = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Die Tendenz der erreichbaren Verbesserung für $\sigma_{\hat{T}}^2$ ist also bei Verwendung von RC- oder passivem PI-Schleifenfilter gegenüber den Werten beim "1- T_C "-Korrelator gleich, absolut gesehen erreicht man bei gleichen Verhältnissen $\frac{f_R}{f_C}$ und gleichen $\frac{T_C}{T}$

mit einem RC-Schleifenfilter etwas höhere Werte.

6.3 Vergleich

Wie aus den graphischen Darstellungen des letzten Abschnittes zu ersehen ist, bringen die mit analogen Filtern ausgerüsteten auf maximale Kennlinie $A(\epsilon)$ optimierten Korrelatoren ($b = b_{\text{opt}} = \frac{f_R}{f_C} = 1,8107$) für RC- oder Allpaßfilter mindestens eine Verbesserung für die Varianz des Zeitfehlers von ca. 3,5 dB. Mit steigendem Verhältnis $\frac{f_R}{f_C}$ wächst dieser Gewinn, bedingt durch die spektrale Begrenzung des transformierten Rauschens $R_n(\tau)$. Diese Begrenzung wird von den zur Bildung der ungeraden Regelkennlinie erforderlichen analogen Filtern im Korrelator hervorgerufen. Welcher Korrelatortyp (RC- oder Allpaßstruktur) absolut günstiger ist, hängt vom Verhältnis $\frac{f_R}{f_C}$ ab. Die folgenden Bilder 6.11 und 6.12 stellen für $b = 1,8107 = b_{\text{opt}}$ und für $b = 2,5$ die erhaltenen Ergebnisse für beide Korrelatortypen bei RC- und PI-Schleifenfilter noch einmal gegenüber.

Eine generelle Aussage, welches Konzept (Allpaß- oder RC-Korrelator mit Verstärkungsfaktor 4 in einem Zweig) die größeren Gewinne der Varianz des Zeitfehlers bei Einfluß von weißem Rauschen im Empfangszweig liefert ist, wie die beiden graphischen Darstellungen zeigen, nicht möglich. Kann auf eine maximal erreichbare Amplitude der Regelkennlinie $A(\epsilon)$ verzichtet werden, so ist bei ca. 3,5 % Amplitudenverlust ein zusätzlicher Gewinn bei der Varianz um ca. 0,5 dB erreichbar ($b = 2,5$). Allpaß- und RC-Korrelator verbessern dann die Varianz des Zeitfehlers gegenüber dem "1- T_C "-Korrelator um mindestens 4,2 dB. Im Grenzverhalten für $\frac{f_R}{f_C} \rightarrow 0$ ergibt sich für $b = 1,8107$ aus dem Bewertungsfaktor M der Gl. (3.66b) eine Verkleinerung der Varianz unabhängig vom verwendeten Schleifenfilter von $a = 3,7$ dB gegenüber dem "1- T_C "-Modell. Damit läßt sich mit dem Faktor M eine brauchbare Abschätzung des Gewinnes für $\sigma_{\hat{T}}^2$ angeben. Für ein $b = 2,5$ wird mit den Gln. (3.20c), (3.60) und (3.64)

der entsprechende Wert mit $a = 4,51$ dB erhalten (vgl. Tendenz der Bilder 6.11 und 6.12 für $\frac{f_R}{f_C} \rightarrow 0$).

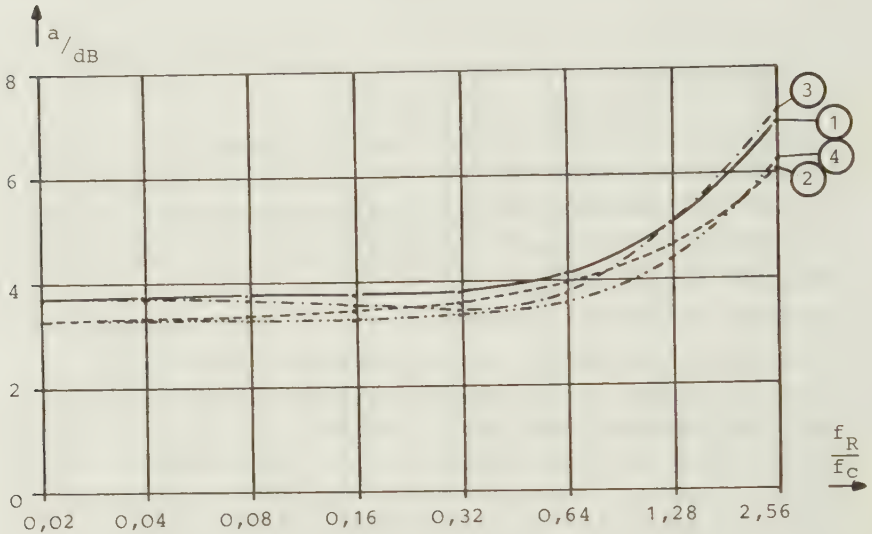


Bild 6.11 Vergleich von Allpaß- und RC-Korrelator bezüglich der Verbesserung der normierten Varianz bei $b = 1,8107$ und $D = 1/\sqrt{2}$ gegenüber dem "1- T_C "-Modell mit $\sigma_{\hat{T}}^2 \sim \frac{f_R}{f_C}$.

Weiterhin spielt für eine Auswahl des günstigsten Korrelators der Einfluß des Multiplikationsrauschens eine wesentliche Rolle. Hier liegen die Ergebnisse für die Spektren am Korrelatorausgang durch die Betrachtungen des 4. Kapitels vor. Die Wirkung auf den geschlossenen DLL-Kreis wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter untersucht.

Wird als Störung nur das auf den Empfangszweig einwirkende weiße Rauschen berücksichtigt, so sind die Ergebnisse für $\sigma_{\hat{T}}^2$ aus diesem Kapitel auch für beliebige mehrstufige Basisfolgen mit dreiecksförmiger (periodischer) Autokorrelationsfunktion gültig.

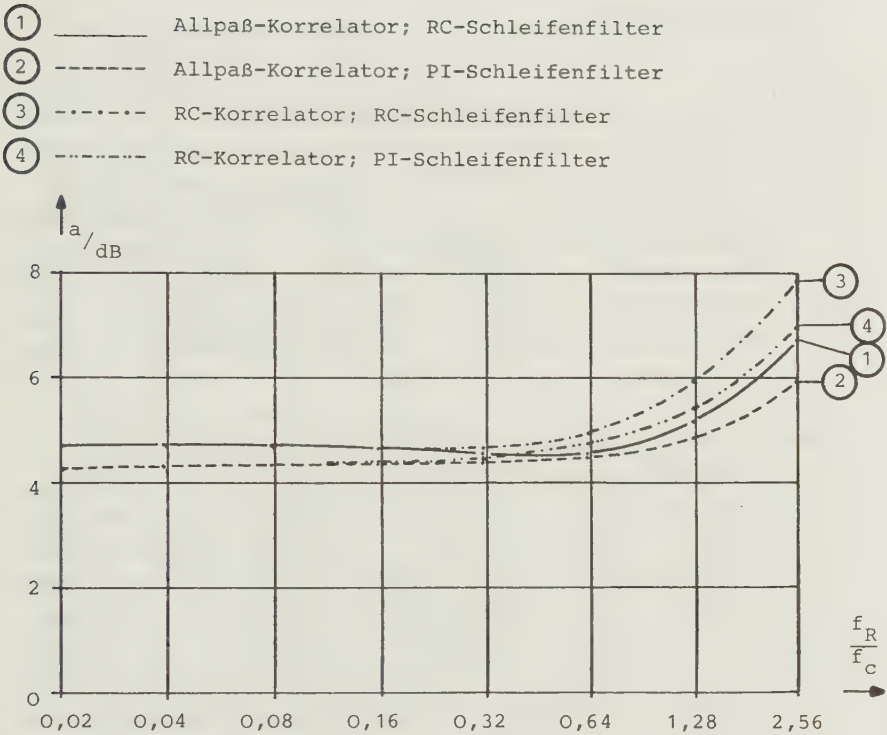


Bild 6.12 Verbesserung der normierten Varianz für $b = 2,5$
 und $D = 1/\sqrt{2}$ bei Allpaß- und RC-Korrelator ge-
 genüber dem "1- T_C "-Modell

Weitere Untersuchungen über die Varianz bei Korrelatoren mit
 höhergradigen Filtern (RLC, Impulsformer) stehen noch aus.
 Allerdings sind die notwendigen Berechnungsansätze bereits
 durch die vorigen Kapitel formuliert.

7. Zusammenfassung

Neben den bekannten Mehrfachausnutzungsverfahren eines Nachrichtenkanals durch Zeit- und Frequenzmultiplextechnik setzt sich mehr und mehr das dritte Verfahren, die Codemultiplextechnik durch. Bei dieser Technik werden die Nachrichten mit einer geeigneten Spreizungsfunktion $s(t)$ im Frequenzbereich auf die annähernd zur Verfügung stehende Kanalbandbreite gespreizt. Eine Demodulation im Empfänger ist nur möglich, wenn der Schlüssel, der verwendete Spreizungscode bekannt ist. Zur Regeneration der mit der Nachricht versehenen und meist durch Kanalrauschen und Fremdstörern gestörten empfangenen Spreizungsfolge $s(t)$ wird meist eine dem Phased-Locked-Loop ähnliche breitbandige Regelschaltung in Form des Delay-Locked-Loop (DLL) eingesetzt. In der vorliegenden Arbeit wurden für den DLL verwendbare, mit analogen realisierbaren Filtern versehene Korrelatornetzwerke entwickelt und bezüglich der Regelkennlinie $A(\epsilon)$ und des transformierten Kanalrauschens untersucht. Da die Analyse vorwiegend mit Korrelationsfunktionen der verwendeten Signale vorgenommen wurde, sind die vorgestellten Strukturen für eine weitaus größere Signalklasse als die bisher meist eingesetzten zweiwertigen Pseudo-Noise-Folgen geeignet. Durch eine systemtheoretische Deutung für die Erzeugung von PN-Folgen entstand ein Syntheseverfahren für im allgemeinen mehrstufige Basisfolgen mit vorgebbaren Eigenschaften bei der Segment- und/oder der periodischen Autokorrelationsfunktion. Diese Signalklassen sind für beliebige ganzzahlige Längen p angebbar und stellen nicht nur als weitere Verschlüsselungsfolgen für die spektrale Spreizung von Nachrichten eine interessante Erweiterungsmöglichkeit dar, sondern sie sind auch als Ortungssignale für Radar und Sonar geeignet, wobei eine Verbesserung der Entfernungsauflösung erreicht wird. Eine Sonderform dieser synthetisierbaren mehrstufigen Folgen mit der Eigenschaft der Verschiebungssorthogonalität besitzt innerhalb einer Periode exakt die gleiche Autokorrelationsfunktion wie eine echte $-1, 1$ Zufallsfolge. Neben dem Einsatz beim Codemul-

timeplexverfahren stellt diese Signalklasse eine geeignete Basisfunktion für die sogenannte M-Transformation zur Bilddatenübertragung und für die Systemanalyse dar.

Durch die systemtheoretische Deutung der Generation von Spreizungsfolgen ist es weiterhin möglich geworden, ein Simulationsmodell zur Ermittlung des Spektrums von analog gefilterten und dann multiplizierten Pseudo-Noise-Folgen anzugeben. Dieses Problem ist relevant zur Ermittlung des sogenannten Eigenrauschens beim DLL, welches durch die Multiplikation von gefilterten Empfangs- und Referenzfolgen entsteht.

Für die linearisierte Regelkennlinie $A(\epsilon)$ beim analogen Korrelator wird ein Ersatzbild des gesamten DLL für den Basisbandbereich angegeben. Nach der Transformation der als weißes Kanalrauschen angenommenen Empfangsstörung hinter dem Korrelator wird ohne Berücksichtigung des Multiplikationsrauschens die Varianz des Zeitverzögerungsfehlers beim geschlossenen Regelkreis bestimmt. Dabei ergeben sich für Korrelatoren mit den analogen Filtern niedrigsten Grades (RC-Filter bzw. Allpässe 1. Grades) Verbesserungen um mindestens 4 dB gegenüber der bisher als optimal bekannten Struktur des " $1-T_C$ "-Korrelators.

A N H A N G

A1: Korrelatorkennlinie für Hilbert-Transformation

Gl. (3.11) entsteht durch Integration von

$$R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_S(\tau)}{\varepsilon - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{T_C} \frac{1 - \tau/T_C}{\varepsilon - \tau} d\tau + \int_{-T_C}^0 \frac{1 + \tau/T_C}{\varepsilon - \tau} d\tau \right\}$$

Mit der Substitution $\varepsilon - \tau = z$, $dz = -d\tau$ wird

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(\varepsilon) &= \frac{1}{\pi} \left\{ - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon - T_C} \frac{1 - \frac{\varepsilon - z}{T_C}}{z} dz - \int_{\varepsilon + T_C}^{\varepsilon} \frac{1 + \frac{\varepsilon - z}{T_C}}{z} dz \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon} \frac{dz}{z} - \frac{\varepsilon}{T_C} \cdot \int_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon} \frac{dz}{z} + \frac{1}{T_C} \cdot \int_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon} dz + \frac{\varepsilon}{T_C} \cdot \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + T_C} \frac{dz}{z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T_C} \cdot \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + T_C} dz \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \ln|z| \Big|_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon + T_C} - \frac{\varepsilon}{T_C} \ln|z| \Big|_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{T_C} \ln|z| \Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon + T_C} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T_C} (z \Big|_{\varepsilon - T_C}^{\varepsilon} - z \Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon + T_C}) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\varepsilon + T_C}{\varepsilon - T_C} \right| - \frac{\varepsilon}{T_C} \ln \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon - T_C} \right| + \frac{\varepsilon}{T_C} \ln \left| \frac{\varepsilon + T_C}{\varepsilon} \right| + \frac{1}{T_C} (\varepsilon - \varepsilon + T_C - \varepsilon - T_C + \varepsilon) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\frac{\varepsilon}{T_C} + 1}{\frac{\varepsilon}{T_C} - 1} \right| + \frac{\varepsilon}{T_C} \cdot \ln \left| \frac{(\frac{\varepsilon}{T_C} + 1)(\frac{\varepsilon}{T_C} - 1)}{\frac{\varepsilon}{T_C} \cdot \frac{\varepsilon}{T_C}} \right| \right\} \end{aligned}$$

Normierung zu $\frac{\varepsilon}{T_C} = y$ ergibt die 1. Form von Gl. (3.11)

$$R_{Y_1 Y_2}(y) = \frac{1}{\pi} \{ \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + y \cdot \ln \left| \frac{(y+1)(y-1)}{y^2} \right| \}$$

Durch Aufspaltung des 1. Gliedes wird die 2. Form erhalten

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(y) &= \frac{1}{\pi} \{ \ln \left| \frac{y+1}{y} \right| + \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| + y \ln \left| \frac{y+1}{y} \right| - y \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \{ (1+y) \ln \left| \frac{y+1}{y} \right| + (1-y) \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| \} \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Lage des Maximums und der Steigung im Nullpunkt wird die 1. Form von Gl. (3.11) mit

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \{ \ln \frac{1+y}{1-y} + y \ln \frac{1-y^2}{y} \}$$

verwendet, da das Maximum für $y < 1$ erwartet wird.

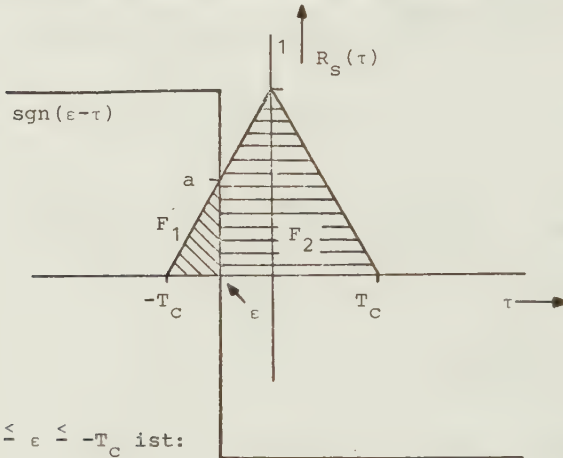
$$\begin{aligned} \frac{dA(y)}{dy} &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-y+(1+y)}{(1-y)^2} + \ln \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + y \frac{y^2}{1-y^2} \cdot \frac{-2y^3 - (1-y^2)2y}{y^4} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{1-y^2} + \ln \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) - \frac{2}{1-y^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{dA(y)}{dy} = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) \text{ für } y < 1$$

A2: Kennlinie für Integration des Empfangszweiges

Es ist zu bilden: $A(\varepsilon) = R_S(\varepsilon) * \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\varepsilon)$.

Hier bietet sich eine graphische Lösung an.



Für $-\infty \leq \varepsilon \leq -T_C$ ist:

$$A(\varepsilon) = -\frac{T_C}{2} = \frac{-(F_1 + F_2)}{2} = \frac{-F_\Delta}{2}$$

Im Bereich $-T_C \leq \varepsilon \leq 0$ gilt mit der dargestellten Skizze

$$2A(\varepsilon) = F_1 - F_2 \quad ; \quad F_2 = F_\Delta - F_1$$

$$2A(\varepsilon) = F_1 - (F_\Delta - F_1) = 2F_1 - F_\Delta$$

Die Ordinate a des Dreiecks F_1 läßt sich mit dem Strahlensatz errechnen $\frac{a}{1} = \frac{T_C - |\varepsilon|}{T_C} = 1 - \frac{|\varepsilon|}{T_C}$ bzw. unter Berücksichtigung, daß ε negativ einzusetzen ist, folgt: $a = 1 + \frac{\varepsilon}{T_C}$.

Damit wird die Dreiecksfläche $F_1 = \frac{a}{2} \cdot (T_C - |\varepsilon|) =$

$$\frac{a}{2} \cdot (T_C + \varepsilon) = \frac{T_C}{2} (1 + y^2) \quad \text{mit } y = \frac{\varepsilon}{T_C}$$

$$2A(y) = T_C(1+y)^2 - T_C = -T_C[1 - (1+y)^2] \quad \text{bzw.}$$

$$A(y) = -\frac{T_c}{2} \cdot \begin{cases} 1 & -\infty \leq y \leq -1 \\ 1 - (1+y)^2 & -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Wegen $A(-y) = -A(y)$ ergibt sich für positives y unmittelbar die Gl. (3.12) in Kap. 3.2.3.

A3: Kennlinie für RC-Filterpaar bei PN-Folgen

Unterscheidung für $t < 0$ und $t > 0$ führt bei der nach Gl. (3.16) angegebenen Faltungsbeziehung auf:

$$A_p(\varepsilon) = \frac{1}{2T} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t/T} \left[\frac{1}{2} + 2 \frac{p+1}{\pi^2} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{v^2} \cos v \Omega(\varepsilon - t) \right] dt \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^0 e^{+t/T} \left[\frac{1}{2} + 2 \frac{p+1}{\pi^2} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{v^2} \cdot \cos v \Omega(\varepsilon - t) \right] dt \right\} = A_p(\varepsilon)$$

wobei zwecks Vereinfachung $\frac{2\pi}{p \cdot T_c} = \Omega$ gesetzt wurde.

Vertauschen von Summation und Integration ergibt

$$A_p(\varepsilon) = \frac{p+1}{\pi^2 T} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{v^2} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t/T} \cdot \cos v \Omega(\varepsilon - t) dt \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^0 e^{t/T} \cdot \cos v \Omega(\varepsilon - t) dt \right\} = \frac{p+1}{2T} \cdot \sum \dots \{I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)\}$$

(Die beiden Teilintegrale über die mit $\frac{1}{2}$ bewerteten e-Funktionen eliminieren sich)

Anwendung der Additionstheoreme auf die beiden Integrale I_1 und I_2 vereinfacht die Berechnung weiter.

$$I_1(\varepsilon) = \cos v\Omega\varepsilon \cdot \int_0^{\infty} e^{-t/T} \cos v\Omega t dt \\ + \sin v\Omega\varepsilon \cdot \int_0^{\infty} e^{-t/T} \sin v\Omega t dt =$$

$$\frac{\cos v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 + (v\Omega)^2} \cdot \frac{1}{T} + \frac{\sin v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 + (v\Omega)^2} \cdot v\Omega \quad \text{s. [10], S. 327}$$

Entsprechend erhält man

$$I_2(\varepsilon) = \frac{-\cos v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 + (v\Omega)^2} \cdot \frac{1}{T} - \frac{\sin v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 + (v\Omega)^2} (-v\Omega)$$

Somit wird die Summe der Integrale

$$I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) = \frac{2v\Omega \cdot \sin v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 + (v\Omega)^2}$$

und

$$A_p(\varepsilon) = \frac{p+1}{\pi^2 \cdot T} \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{p \cdot T_C} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v \frac{\pi}{p}}{v^2} \cdot v \cdot \frac{\sin v\Omega\varepsilon}{(\frac{1}{T})^2 \cdot [1 + (v \cdot T \cdot \frac{2\pi}{pT_C})^2]}$$

wodurch nach kleiner algebraischer Umformung direkt Gl. (3.17) folgt.

A4: Kennlinie für RC-Filterpaar bei echten Zufallsfolgen

Mit Gl. (3.15) wird

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{2TT_C} [e^{-\varepsilon/T} \cdot \delta_{-1}(\varepsilon) - e^{\varepsilon/T} \cdot \delta_{-1}(-\varepsilon)] * \text{rect}_{\frac{\varepsilon}{T_C}} * \text{rect}_{\frac{\varepsilon}{T_C}} \\ = \frac{1}{2T \cdot T_C} \cdot h_n(\varepsilon) * \text{rect}_{\frac{\varepsilon}{T_C}} * \text{rect}_{\frac{\varepsilon}{T_C}}$$

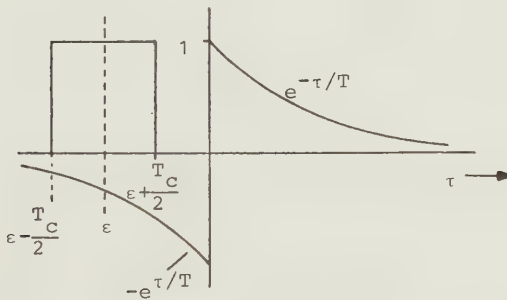
mit $h_n(\varepsilon)$ als von Konstanten befreite Funktion $h(\varepsilon) = \frac{1}{2T} \cdot h_n(\varepsilon)$.

Das Teilfaltungsprodukt $R_1(\varepsilon) = h_n(\varepsilon) * \text{rect } \frac{\varepsilon}{T_C}$ gelte für

$-\infty < \varepsilon < -\frac{T_C}{2}$. Es kann entsprechend der Skizze zu

$$R_1(\varepsilon) = - \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{\tau/T} d\tau = -2T : e^{\varepsilon/T} \cdot \sinh \frac{T_C}{2T}$$

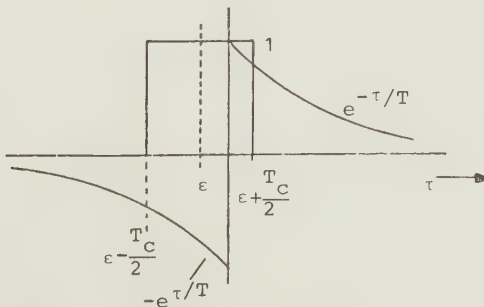
angegeben werden.



Für die 2. Teilfaltung gültig im Bereich $-\frac{T_C}{2} < \varepsilon < \frac{T_C}{2}$ erhält man

$$R_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^0 -e^{\tau/T} d\tau + \int_0^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{-\tau/T} d\tau = T \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \cdot 2 \sinh \frac{\varepsilon}{T}$$

Die Integralgrenzen ergeben sich durch die nachfolgende Skizze.



Sinngemäß wird die 3. Teilfaltung für den Bereich $\frac{T_C}{2} \leq \epsilon \leq \infty$ ausgeführt zu

$$R_3(\epsilon) = \int_{\epsilon - \frac{T_C}{2}}^{\epsilon + \frac{T_C}{2}} e^{-\tau/T} d\tau = 2 \cdot T \cdot e^{-\epsilon/T} \cdot \sinh \frac{T_C}{2T}$$

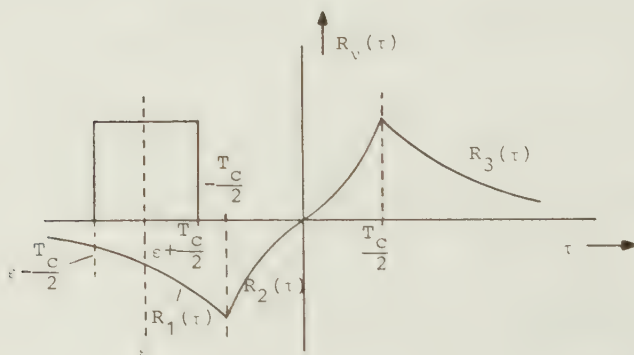
Somit läßt sich das Teilergebnis in der Form

$$A(\epsilon) = \frac{1}{2T \cdot T_C} \cdot \text{rect} \frac{\epsilon}{T_C} * \left\{ \begin{array}{ll} R_1(\epsilon) & \text{für } -\infty \leq \epsilon \leq \frac{T_C}{2} \\ R_2(\epsilon) & \text{für } -\frac{T_C}{2} \leq \epsilon \leq \frac{T_C}{2} \\ R_3(\epsilon) & \text{für } \frac{T_C}{2} \leq \epsilon \leq \infty \end{array} \right.$$

darstellen.

Die drei Funktionsteile $R_v(\epsilon)$, $v = 1, 2, 3$ stoßen stetig aneinander, die Ableitungen sind jedoch an den Punkten für

$\epsilon = \frac{T_C}{2}$ noch unstetig, sie werden durch die nächste Teilfaltung (Integration) stetig. Die entsprechenden Teilergebnisse werden mit römischen Zahlen indiziert: $R_I(\epsilon) = \frac{1}{2T T_C} \cdot [\text{rect} \frac{\epsilon}{T_C} * R_1(\epsilon)]$ usw.



Für $-\infty \leq \epsilon \leq T_C$ gilt:

$$\begin{aligned}
 R_I(\varepsilon) &= \frac{1}{2T \cdot T_C} \cdot (-2 \cdot T \cdot \sinh \frac{T_C}{2T}) \cdot \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{\tau/T} \cdot d\tau \\
 &= -\frac{1}{T_C} \cdot \sinh \frac{T_C}{2T} \cdot T \cdot e^{\varepsilon/T} \cdot \sinh \frac{T_C}{2T}
 \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen für Hyperbelfunktionen [10], S. 166 wird

$$R_I(\varepsilon) = -\frac{T}{T_C} \cdot (\cosh \frac{T_C}{T} - 1) \cdot e^{\varepsilon/T}$$

Im Bereich $-T_C \leq \varepsilon \leq 0$ lautet die Rechenvorschrift:

$$\begin{aligned}
 R_{II}(\varepsilon) &= \frac{1}{2TT_C} \cdot T \cdot 2 \cdot \left\{ -\sinh \frac{T_C}{2T} \cdot \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{-T_C/2} e^{\tau/T} d\tau + e^{-\frac{T_C}{2T}} \cdot \int_{\frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sinh \frac{\tau}{T} d\tau \right\} \\
 &= \frac{T}{T_C} \left\{ e^{\varepsilon/T} - 1 - e^{-\frac{T_C}{T}} \sinh \frac{\varepsilon}{T} \right\}
 \end{aligned}$$

Wegen der Antimetrie von R_{III} und R_{IV} zum Nullpunkt zu R_{II} und R_I liegt damit die gesamte 2. Teilfaltung fest, es folgt aus R_I und R_{II} die gesamte Funktion $A(\varepsilon)$, s. Gl. (3.18).

A5: Optimierung der Kennlinie A(s) für das RC-Filterpaar

Die aus Gl. (3.18) erhaltene normierte Funktion $f(y,b)$ wird partiell nach den unabhängigen Variablen differenziert.

$$f(b,y) = \frac{1}{b} (1 - e^{-by} - e^{-b} \cdot \sinh by) \quad \text{für } 0 \leq y \leq 1$$

$$f_y = \frac{1}{b} (+b e^{-by} - e^{-b} \cdot \cosh by \cdot b)$$

$$f_y \stackrel{!}{=} 0 \quad e^{-by} = e^{-b} \cdot \cosh by = e^{-b} \cdot \frac{1}{2}(e^{by} + e^{-by})$$

$$e^{-by} = \frac{e^{-by}}{2} (e^{2by+1}) \cdot e^{-b} ; \quad e^b = \frac{1}{2}(e^{2by+1})$$

$$e^b - \frac{1}{2} = (e^b)^{2y} \cdot \frac{1}{2} ; \quad 2e^b - 1 = (e^b)^{2y} \quad \text{Logarithmieren}$$

$$\ln(2e^b - 1) = 2y \cdot \ln e^b = 2y \cdot b$$

Daraus ergibt sich:

$$y_{\max} = \frac{\ln(2e^b - 1)}{2b} \quad \text{s. Gl. (3.20a)}$$

Bilden der partiellen Ableitung nach b :

$$\begin{aligned} f_b &= -\frac{1}{b^2} - \frac{-by \cdot e^{-by} - e^{-by}}{b^2} - \frac{b(y-1) \cdot e^{b(y-1)} - e^{b(y-1)}}{2b^2} \\ &+ \frac{-b(y+1) \cdot e^{-b(y+1)} - e^{-b(y+1)}}{2b^2} = \\ &= \{-2e^{-by}(1+by) \cdot 2 - (by-b)e^{b(y-1)} - (by+b) \cdot e^{-b(y+1)} \\ &+ e^{b(y-1)} - e^{-b(y+1)}\} : 2b^2 \end{aligned}$$

$$f_b \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} 2 + (by-b) \cdot e^{b(y-1)} + (by+b) \cdot e^{-b(y+1)} + e^{-b(y+1)} &= \\ &= 2e^{-by} \cdot (1+by) + e^{b(y-1)} \end{aligned}$$

Beide Seiten mit e^b multiplizieren.

$$2e^b + (by-b) \cdot e^{2by} + (by+b)e^{-by} + e^{-by} = 2e^b e^{-by} (1+by) + e^{by}$$

Beide Gleichungsseiten mit e^{by} multiplizieren.

$$2e^b \cdot e^{by} + (by-b)e^{2by+by+b+1} = 2e^b (1+by) + e^{2by}$$

Mit der Substitution $e^b = z$; $b = \ln z$ und Einsetzen von Gl. (3.20a)

$$y_{\max} b = \frac{1}{2} \ln (2z-1) = \ln \sqrt{2z-1}$$

$$\text{bzw. } e^{y_m b} = e^{\ln \sqrt{2z-1}} = \sqrt{2z-1}$$

kann weiter geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 2z \cdot \sqrt{2z-1} + (2z-1) \ln \frac{\sqrt{2z-1}}{z} + \ln [\sqrt{2z-1} \cdot z \cdot e] &= \\ 2z-1 + 2z \cdot \ln [\sqrt{2z-1} \cdot e] \end{aligned}$$

Zusammenfassung der logarithmischen Anteile führt auf eine weitere Vereinfachung.

$$\begin{aligned} 2z \sqrt{2z-1} + 2z \cdot \ln \frac{\sqrt{2z-1}}{z} + \ln \frac{\sqrt{2z-1} \cdot z \cdot e \cdot z}{\sqrt{2z-1}} \\ = 2z-1 + 2z \ln \sqrt{2z-1} \cdot e \end{aligned}$$

$$2z\sqrt{2z-1} + 2z \ln \frac{\sqrt{2z-1}}{z \cdot e^{\sqrt{2z-1}}} + 2 \ln z + \ln e = 2z-1$$

$$2z\sqrt{2z-1} + (\ln z) \cdot (2-2z) - 2z = 2z-2$$

$$z\sqrt{2z-1} + (\ln z) \cdot (1-z) + 1 - 2z = 0$$

Rücksubstitution mit $z = e^b$ ergibt die transzendente Bestimmungsgleichung für $b_{\max} = b_{\text{opt}}$

$$e^b \sqrt{2e^b - 1} + b(1 - e^b) + 1 - 2e^b = 0$$

welche durch iteratives rechnergestütztes Lösen den Wert in Gl. (3.20b) liefert.

A6: Berechnung der Kennlinie $A(\varepsilon)$ für das Filterpaar 2. Ordnung (RLC-System)

Gl. (3.25) wird zerlegt in 2 Teilfaltungen.

$$A(\varepsilon) = h(\varepsilon) * \text{rect} \frac{\varepsilon}{T_C} * \frac{1}{T_C} \text{rect} \frac{\varepsilon}{T_C} = R_{1,2}(\varepsilon) * \frac{1}{T_C} \text{rect} \frac{\varepsilon}{T_C}.$$

Im Bereich $-\infty \leq \varepsilon \leq \frac{T_C}{2}$ gilt für $R_1(\varepsilon)$

$$R_1(\varepsilon) = \frac{\omega_0}{2 \sin \vartheta} \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{\omega_0 \cos \vartheta \cdot \tau} \cdot \sin(\omega_0 \tau \cdot \sin \vartheta) d\tau$$

Mit den Abkürzungen $a = \omega_0 \cos \vartheta$ und $b = \omega_0 \sin \vartheta$ ergibt sich für das in |10| tabellierte Integral

$$R_1(\varepsilon) = \frac{\omega_0}{2\sin\vartheta} \cdot \frac{e^{a\tau}}{\omega_0} [\omega_0 \cos\vartheta \cdot \sin(\omega_0 \sin\vartheta \cdot \tau) - \omega_0 \sin\vartheta \cdot \cos(\omega_0 \sin\vartheta \cdot \tau)]$$

$\begin{array}{c} T \\ \varepsilon + \frac{C}{2} \\ \hline T \\ \varepsilon - \frac{C}{2} \end{array}$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern kann mit den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen weiter vereinfacht werden.

$$R_1(\varepsilon) = \frac{e^{a\tau}}{2\sin\vartheta} [\sin(b\tau - \vartheta)]$$

$\begin{array}{c} T \\ \varepsilon + \frac{C}{2} \\ \hline T \\ \varepsilon - \frac{C}{2} \end{array}$

$$= \frac{1}{2\sin\vartheta} \{ e^{a(\varepsilon + \frac{T}{2})} \cdot \sin[b(\varepsilon + \frac{T}{2}) - \vartheta] - e^{a(\varepsilon - \frac{T}{2})} \cdot \sin[b(\varepsilon - \frac{T}{2}) - \vartheta] \}$$

$$R_1(\varepsilon) = \frac{e^{a\varepsilon}}{2\sin\vartheta} \{ e^{\frac{aT}{2}} \cdot \sin[b\varepsilon + b\frac{T}{2} - \vartheta] - e^{-\frac{aT}{2}} \cdot \sin[b\varepsilon - b\frac{T}{2} - \vartheta] \} \quad (A6.1)$$

Für den zweiten Bereich $-\frac{T}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{T}{2}$ ergibt sich die Funktion $R_2(\varepsilon)$ zu:

$$R_2(\varepsilon) = \frac{\omega_0}{2\sin\vartheta} \left\{ \int_{\varepsilon - \frac{T}{2}}^0 e^{a\tau} \cdot \sin b\tau d\tau + \int_0^{\varepsilon + \frac{T}{2}} e^{-a\tau} \cdot \sin b\tau d\tau \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sin\vartheta} \left\{ [e^{a\tau} \sin(b\tau - \vartheta)] \Big|_{\varepsilon - \frac{T}{2}}^0 - [e^{-a\tau} \cdot \sin(b\tau + \vartheta)] \Big|_0^{\varepsilon + \frac{T}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sin\vartheta} \{ 1 \sin(-\vartheta) - e^{a(\varepsilon - \frac{T}{2})} \cdot \sin[b(\varepsilon - \frac{T}{2}) - \vartheta] - e^{-a(\varepsilon + \frac{T}{2})} \cdot \sin[b(\varepsilon + \frac{T}{2}) + \vartheta] - 1 \cdot \sin\vartheta \}$$

$$R_2(\varepsilon) = -\frac{e^{-a \cdot \frac{T_C}{2}}}{2 \sin \vartheta} \{ e^{a\varepsilon} \cdot \sin[b\varepsilon - b \cdot \frac{T_C}{2} - \vartheta] + e^{-a\varepsilon} \sin[b\varepsilon + b \cdot \frac{T_C}{2} + \vartheta] \} \quad (A6.2)$$

Die beiden Funktionsteile R_1 und R_2 müssen für $\varepsilon = -\frac{T_C}{2}$ stetig aneinander stoßen, die Ableitungen hingegen sind noch unstetig an dieser Stelle.

$$R_1(-\frac{T_C}{2}) = \frac{e^{-a \frac{T_C}{2}}}{2 \sin \vartheta} \{ e^{\frac{T_C}{2}} \sin(-\vartheta) - e^{-a \frac{T_C}{2}} \cdot \sin(-bT_C - \vartheta) \}$$

$$R_2(-\frac{T_C}{2}) = -\frac{e^{-a \frac{T_C}{2}}}{2 \sin \vartheta} \{ e^{-a \frac{T_C}{2}} \cdot \sin(-bT_C - \vartheta) + e^{\frac{T_C}{2}} \cdot \sin \vartheta \}$$

$$\text{d.h.} \quad R_1(-\frac{T_C}{2}) = R_2(-\frac{T_C}{2})$$

Bei der zweiten Teilfaltung werden die beiden Funktionen R_1 und R_2 mit $\frac{1}{T_C} \cdot \text{rect} \frac{t}{T_C}$ gefaltet.

$$A_I(\varepsilon) = R_1(\varepsilon) * \text{rect} \frac{\varepsilon}{T_C} \cdot \frac{1}{T_C} \quad \text{für} \quad -\infty \leq \varepsilon \leq -T_C$$

$$A_I(\varepsilon) = \frac{1}{T_C} \cdot \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} R_1(\tau) d\tau = \frac{1}{2T_C \cdot \sin \vartheta} \cdot \{ e^{\frac{T_C}{2}} \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau + b \frac{T_C}{2} - \vartheta) d\tau - e^{-a \frac{T_C}{2}} \cdot \int_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau - b \frac{T_C}{2} - \vartheta) d\tau \}$$

$$A_I(\varepsilon) = \frac{1}{2T_C \sin \vartheta} \{ e^{\frac{T_C}{2}} \cdot \frac{e^{a\tau}}{\omega_0} \cdot \sin(b\tau - \vartheta + b \frac{T_C}{2}) \Big|_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} - e^{-a \frac{T_C}{2}} \cdot \frac{e^{a\tau}}{\omega_0} \cdot \sin(b\tau - \vartheta - b \frac{T_C}{2}) \Big|_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} \}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\omega_0 T_C \sin \vartheta} \left\{ e^{\frac{aT_C}{2}} < e^{a \cdot \epsilon} \cdot e^{\frac{aT_C}{2}} \cdot \sin(b\epsilon + bT_C - 2\vartheta) \right. \\
&\quad \left. - e^{a\epsilon} \cdot e^{-\frac{aT_C}{2}} \cdot \sin(b\epsilon - 2\vartheta) > \right. \\
&\quad \left. - e^{-\frac{aT_C}{2}} < e^{a\epsilon} \cdot e^{\frac{aT_C}{2}} \cdot \sin(b\epsilon - 2\vartheta) \right. \\
&\quad \left. - e^{a\epsilon} \cdot e^{-\frac{aT_C}{2}} \cdot \sin(b\epsilon - bT_C - 2\vartheta) > \right\}
\end{aligned}$$

Somit liegt das Ergebnis für den 1. Teilbereich $-\infty \leq \epsilon \leq -T_C$ fest:

$$\begin{aligned}
A_I(\epsilon) &= \frac{e^{a\epsilon}}{2\omega_0 T_C \cdot \sin \vartheta} \left\{ e^{aT_C} \cdot \sin(b\epsilon + bT_C - 2\vartheta) \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin(b\epsilon - 2\vartheta) \right. \\
&\quad \left. + e^{-aT_C} \cdot \sin(b\epsilon - bT_C - 2\vartheta) \right\}
\end{aligned} \tag{A6.3}$$

Der Bereich $-T_C \leq \epsilon \leq 0$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
A_{II}(\epsilon) &= R_{1,2}(\epsilon) * \text{rect} \frac{\epsilon}{T_C} \cdot \frac{1}{T_C} \\
&= \frac{1}{T_C} \int_{\epsilon - \frac{T_C}{2}}^{\frac{T_C}{2}} R_1(\tau) d\tau + \frac{1}{T_C} \cdot \int_{\frac{T_C}{2}}^{\epsilon + \frac{T_C}{2}} R_2(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2T_C \cdot \sin \vartheta} \left\{ e^{\frac{aT_C}{2}} \cdot \int_{\frac{T_C}{2}}^{\frac{T_C}{2}} e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau + b\frac{T_C}{2} - \vartheta) d\tau \right. \\
&\quad \left. - e^{-\frac{aT_C}{2}} \cdot \int_{\epsilon - \frac{T_C}{2}}^{\frac{T_C}{2}} e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau - b\frac{T_C}{2} - \vartheta) d\tau \right. \\
&\quad \left. - e^{-\frac{aT_C}{2}} \cdot \int_{\frac{T_C}{2}}^{\epsilon + \frac{T_C}{2}} e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau - b\frac{T_C}{2} - \vartheta) d\tau \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \int_{-\frac{T_C}{2}}^{\frac{T_C}{2}} e^{-a\tau} \cdot \sin(b\tau + b \frac{T_C}{2} + \vartheta) d\tau \}$$

Das 2. und 3. Integral läßt sich zu einem Integral mit neuen Grenzen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} A_{II}(\varepsilon) &= \frac{1}{2\omega_0 T_C \cdot \sin\vartheta} \cdot \left\{ e^{\frac{T_C}{2}} \cdot e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau - \vartheta + b \frac{T_C}{2} - \vartheta) \right|_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\frac{T_C}{2}} \\ &\quad - e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot e^{a\tau} \cdot \sin(b\tau - \vartheta - b \frac{T_C}{2} - \vartheta) \left|_{\varepsilon - \frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot e^{-a\tau} \cdot \sin(b\tau + \vartheta + b \frac{T_C}{2} + \vartheta) \right|_{\frac{T_C}{2}}^{\varepsilon + \frac{T_C}{2}} \} \\ &= \frac{1}{2\omega_0 T_C \cdot \sin\vartheta} \cdot \left\{ e^{\frac{T_C}{2}} \left[e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot \sin(-2\vartheta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{a\varepsilon} e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot \sin(b\varepsilon - 2\vartheta) \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{T_C}{2}} \left[e^{a\varepsilon} \cdot e^{\frac{T_C}{2}} \cdot \sin(b\varepsilon - 2\vartheta) - e^{a\varepsilon} e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot \sin(b\varepsilon - bT_C - 2\vartheta) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{T_C}{2}} \left[e^{-a\varepsilon} \cdot e^{-\frac{T_C}{2}} \cdot \sin(b\varepsilon + bT_C + 2\vartheta) - e^{\frac{T_C}{2}} \cdot \sin 2\vartheta \right] \right\} \end{aligned}$$

Somit erhält man für $-T_C \leq \varepsilon \leq 0$:

$$\begin{aligned} A_{II}(\varepsilon) &= \frac{1}{2\omega_0 T_C \cdot \sin\vartheta} \{ e^{-aT_C} [e^{a\varepsilon} \cdot \sin(b\varepsilon - b \cdot T_C - 2\vartheta) \\ &\quad + e^{-a\varepsilon} \cdot \sin(b\varepsilon + bT_C + 2\vartheta)] \\ &\quad - 2e^{a\varepsilon} \cdot \sin(b\varepsilon - 2\vartheta) - 2\sin 2\vartheta \} \end{aligned} \quad (A6.4)$$

Eine Überprüfung von $A_I(-T_C)$ und $A_{II}(-T_C)$ zeigt, daß die beiden Teilfunktionen sich stetig bei $\varepsilon = -T_C$ treffen. Die Faltungen für die Bereiche $0 \leq \varepsilon \leq T_C$ und $T_C \leq \varepsilon \leq \infty$ brauchen nicht erneut berechnet zu werden, da die Funktion $A(\varepsilon)$ durch Faltung von der ungeraden Impulsantwort $h(\varepsilon)$ und der geraden AKF $R_S(\varepsilon)$ wieder ungerade wird. Für positive Zeiten erhält man deshalb:

$$A(\varepsilon) = \frac{-1}{2\omega_0 T_C \sin \vartheta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{-aT_C} [e^{a\varepsilon} \cdot \sin \langle (T_C - \varepsilon)b + 2\vartheta \rangle \\ - e^{-a\varepsilon} \cdot \sin \langle (T_C + \varepsilon)b + 2\vartheta \rangle] \\ + 2e^{-a\varepsilon} \cdot \sin(b\varepsilon + 2\vartheta) - 2\sin 2\vartheta \} \text{ für } 0 \leq \varepsilon \leq T_C \\ \text{-----} \\ e^{-a\varepsilon} \cdot \{ e^{aT_C} \cdot \sin[(T_C - \varepsilon)b - 2\vartheta] + 2\sin(b\varepsilon + 2\vartheta) \} \\ - e^{-aT_C} \cdot \sin[(T_C + \varepsilon)b + 2\vartheta] \} \text{ für } T_C \leq \varepsilon \leq \infty \end{array} \right.$$

Normierung mit $\frac{\varepsilon}{T_C} = y$ und $\omega_0 T_C = c$ ergibt die von zwei Variablen abhängige Funktion $A(c, y)$, s. Gl. (3.26)

$$A(c, y) = \frac{-1}{2 \cdot c \cdot \sin \vartheta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{-c \cos \vartheta} [e^{c \cdot y \cos \vartheta} \cdot \sin \langle (1-y) \cdot c \cdot \sin \vartheta + 2\vartheta \rangle \\ - e^{-c y \cos \vartheta} \cdot \sin \langle (1+y) c \cdot \sin \vartheta + 2\vartheta \rangle] \\ + 2e^{-c y \cos \vartheta} \cdot \sin(c y \sin \vartheta + 2\vartheta) - 2\sin 2\vartheta \} \text{ für } 0 \leq y \leq 1 \\ \text{-----} \\ e^{-c y \cos \vartheta} \{ e^{c \cos \vartheta} \cdot \sin[(1-y) c \sin \vartheta - 2\vartheta] \\ + 2 \cdot \sin(c y \cdot \sin \vartheta + 2\vartheta) - e^{-c \cos \vartheta} \cdot \sin[(1+y) c \sin \vartheta + 2\vartheta] \} \end{array} \right.$$

für $1 \leq y \leq \infty$

Für die Ableitung nach der normierten Verzögerung y ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA(c, y)}{dy} &= \frac{-1}{2c \cdot \sin \vartheta} \{ e^{-ccos \vartheta} [c \cos \vartheta \cdot e^{cycos \vartheta} \cdot \sin((1-y)c \sin \vartheta + 2\vartheta) \\
 &\quad - e^{cycos \vartheta} \cdot c \sin \vartheta \cdot \cos((1-y)c \sin \vartheta + 2\vartheta)] \\
 &\quad + c \cos \vartheta \cdot e^{-cycos \vartheta} \cdot \sin((1+y)c \sin \vartheta + 2\vartheta) \\
 &\quad - c \sin \vartheta \cdot e^{-cycos \vartheta} \cdot \cos((1+y)c \sin \vartheta + 2\vartheta)] \\
 &\quad - 2 c \cos \vartheta \cdot e^{-cycos \vartheta} \cdot \sin(cy \sin \vartheta + 2\vartheta) \\
 &\quad + 2 \cdot c \sin \vartheta \cdot e^{-cycos \vartheta} \cdot \cos(cy \sin \vartheta + 2\vartheta) \} \\
 &= \frac{-1}{2 \sin \vartheta} \{ e^{-ccos \vartheta} \cdot e^{cycos \vartheta} [\cos \vartheta \cdot \sin(> - \sin \vartheta \cos < >] \\
 &\quad + e^{-ccos \vartheta} \cdot e^{-cycos \vartheta} [\cos \vartheta \cdot \sin(> - \sin \vartheta \cdot \cos < >] \\
 &\quad - 2 \cdot e^{-cycos \vartheta} [\cos \vartheta \sin() - \sin \vartheta \cdot \cos()] \}
 \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen für die eckigen Klammern ist eine weitere Vereinfachung möglich.

$$\begin{aligned}
 \frac{dA(c, y)}{dy} &= \frac{-1}{2 \sin \vartheta} \{ e^{-(1-y)c \cos \vartheta} \sin[(1-y)c \sin \vartheta + \vartheta] \\
 &\quad + e^{-(1+y)c \cos \vartheta} \cdot \sin[(1+y)c \sin \vartheta + \vartheta] \\
 &\quad - 2 \cdot e^{-cycos \vartheta} \cdot \sin(cy \sin \vartheta + \vartheta) \}
 \end{aligned} \tag{A6.5}$$

Direkte Ableitung nach der Variablen ϵ wird durch "Nachdifferenzieren" erhalten

$$\frac{dA(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{dA(c,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{d\epsilon} = \frac{1}{T_c} \cdot \frac{dA(c,y)}{dy}$$

A7: Bestimmung der Impulsantwort $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega) \cdot H_2^*(j\omega)\}$ für einen Impulsformer 3. Grades.

Die in der Gl. (3.34) angegebenen Konstanten reduzieren sich bei den 3-gradigen Filtern zu:

$$\frac{K}{|s_{n\infty 1}|^2 \cdot |s_{n\infty 2}|} = 1$$

Somit wird Gl. (3.34)

$$h(t) = K \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{8 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot \omega_B^2 [e^{-a \cdot |t|} \sin bt] * e^{-c|t|}$$

mit $a = \omega_0 \cos \vartheta$; $b = \omega_0 \cdot \sin \vartheta$; $c = |s_{\infty 2}|$

Zur Schreibvereinfachung wird $K \cdot \frac{c_1 + l_2 + c_3}{8 \cdot \sin 2\vartheta} = M$ gesetzt.

Bei Ausführung der Faltungsintegration unter Berücksichtigung der verschiedenen Gültigkeitsbereiche für die Teilfunktionen gilt:

$$h(t) = M \cdot \omega_B^2 \left\{ \int_{-\infty}^t e^{a\tau} \cdot \sin b\tau \cdot e^{-c\tau} \cdot e^{c\tau} d\tau \right. \\ \left. + \int_t^0 e^{a\tau} \sin b\tau e^{c\tau} \cdot e^{-c\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cdot \sin b\tau \cdot e^{c\tau} \cdot e^{-c\tau} d\tau \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= M \cdot \omega_B^2 \left\{ e^{-ct} \cdot \frac{e^{(a+c)\tau}}{(a+c)^2 + b^2} \left[(a+c) \cdot \sin b\tau - b \cdot \cos b\tau \right] \right|_{-\infty}^t \\
&\quad + e^{ct} \cdot \frac{e^{(a-c)\tau}}{(a-c)^2 + b^2} \left[(a-c) \cdot \sin b\tau - b \cdot \cos b\tau \right] \right|_t^0 \\
&\quad + e^{ct} \cdot \frac{e^{-(a+c)\tau}}{(a+c)^2 + b^2} \left[-(a+c) \cdot \sin b\tau - b \cdot \cos b\tau \right] \right|_0^\infty \}
\end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen führt auf

$$\begin{aligned}
h(t) &= M \cdot \omega_B^2 \left\{ \frac{e^{-ct}}{(a+c)^2 + b^2} \left[e^{(a+c)t} \cdot \langle (a+c) \cdot \sin bt - b \cos bt \rangle - 0 \right] \right. \\
&\quad + \frac{e^{ct}}{(a-c)^2 + b^2} \left[-b - e^{(a-c)t} \cdot \langle (a-c) \cdot \sin bt - b \cdot \cos bt \rangle \right] \\
&\quad + \frac{e^{ct}}{(a+c)^2 + b^2} \left[0 - 1 \cdot \langle -b \rangle \right] \} \\
&= M \cdot \omega_B^2 \cdot \left\{ e^{at} \cdot \left[\frac{(a+c) \cdot \sin bt - b \cos bt}{(a+c)^2 + b^2} - \frac{(a-c) \cdot \sin bt - b \cdot \cos bt}{(a-c)^2 + b^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + b \cdot e^{ct} \left[\frac{1}{(a+c)^2 + b^2} - \frac{1}{(a-c)^2 + b^2} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Nenner wird wieder die normierte Pole enthaltene Rücksubstitution vorgenommen

$$(a \pm c)^2 + b^2 = a^2 \pm 2ac + c^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ac$$

$$= \omega_0^2 + c^2 \left(1 \pm 2 \frac{a}{c} \right) = |s_{n\infty 1}|^2 \cdot \omega_B^2 + |s_{n\infty 2}|^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \left[1 \pm 2 \frac{|s_{n\infty 1}| \cdot \cos \vartheta}{|s_{n\infty 2}|} \right]$$

Die trigonometrischen Funktionen lassen sich ebenfalls vereinfachen.

$$(a \pm c) \sin bt - b \cdot \cos bt = A \cdot \sin(bt - \psi)$$

$$= A \cdot \cos \psi \cdot \sin bt - A \cdot \sin \psi \cdot \cos bt$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot \cos \psi &= a \pm c \\ A \cdot \sin \psi &= b \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{(a \pm c)^2 + b^2} \\ \tan \psi &= \frac{b}{a \pm c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a \pm c} &= \frac{\omega_o \cdot \sin \vartheta}{\omega_o \cdot \cos \vartheta \pm |s_{n\infty 2}| \cdot \omega_B} = \frac{|s_{n\infty 1}| \cdot \omega_B \cdot \sin \vartheta}{|s_{n\infty 1}| \cdot \omega_B \cdot \cos \vartheta \pm |s_{n\infty 2}| \cdot \omega_B} \\ &= \frac{|s_{n\infty 1}| \cdot \sin \vartheta}{|s_{n\infty 1}| \cdot \cos \vartheta \pm |s_{n\infty 2}|} \stackrel{!}{=} \frac{\beta}{\alpha \pm \gamma} \end{aligned}$$

mit
$$\beta = \frac{|s_{n\infty 1}| \cdot \sin \vartheta}{\quad} = \operatorname{Im}\{s_{n\infty 1}\}$$

$$\alpha = \frac{|s_{n\infty 1}| \cdot \cos \vartheta}{\quad} = \operatorname{Re}\{s_{n\infty 1}\}$$

$$\gamma = |s_{n\infty 2}| \quad = \text{Betrag des negativ reellen Poles}$$

Mit den Winkeln
$$\psi_1 = \arctan \frac{\beta}{\alpha + \gamma}$$

$$\psi_2 = \arctan \frac{\beta}{\alpha - \gamma}$$

gilt weiter:

$$h(t) = M \cdot \omega_B \cdot \left\{ e^{\omega_B \cdot t \alpha} \left[\frac{\sin(\omega_B \cdot t \cdot \beta - \psi_1)}{\sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2}} - \frac{\sin(\omega_B \cdot t \cdot \beta - \psi_2)}{\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2}} \right] \right\}$$

$$+ \beta \cdot e^{\omega_B \cdot t \cdot \gamma} \left[\frac{1}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2} - \frac{1}{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \right] \Bigg\}$$

Diese Funktion gilt für $-\infty \leq t \leq 0$ bei

$$M = \frac{c_1 + \ell_2 + c_3}{8 \cdot \sin 2\vartheta} \cdot K$$

$$\text{mit } \vartheta = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{s_{n_\infty 1}\}}{\operatorname{Re}\{s_{n_\infty 1}\}} = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

Für positive Zeiten t ergibt sich $h(t) = -h(-t)$, da eine gerade und eine ungerade Funktion miteinander gefaltet wieder eine ungerade Funktion ergibt, s. Gl. (3.35).

A8: Berechnung der AKF $R_{Y_2}(\tau)$ für das System 1. Ordnung

Mit der Beziehung nach Gl. (3.49) gilt für $R_{Y_2}(\tau)$:

$$\begin{aligned} R_{Y_2}(\tau) &= \frac{1}{T_C} \cdot \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C} * \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C} * R_{h_2}(\tau) \\ &= R_S(\tau) - \frac{1}{T_C} \cdot \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C} * \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C} * R_{h_1}(\tau) \\ &= R_S(\tau) - R_S(\tau) * R_{h_1}(\tau) \end{aligned}$$

Somit braucht nur die Teilfaltung $R_S * R_{h_1}$ berechnet zu werden, die auch für den Fall des Vertauschens von H_1 und H_2 benötigt wird.

$$R_S(\tau) * R_{h_1}(\tau) = \frac{1}{T_C} \cdot \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C} * R_{h_1}(\tau) * \operatorname{rect} \frac{\tau}{T_C}$$

$$R_{h1}(\tau) * \text{rect} \frac{\tau}{T_C} = \frac{1}{2T} \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^{\tau + \frac{T_C}{2}} e^{t/T} dt = \frac{1 \cdot T}{2T} \cdot e^{\tau/T} \cdot 2 \sinh \frac{T_C}{2T}$$

für $-\infty < \tau < \frac{T_C}{2}$ (A8.1)

Im Bereich $\frac{T_C}{2} < \tau < 0$ lautet das Faltungsprodukt:

$$\begin{aligned} \text{rect} \frac{\tau}{T_C} * R_{h1}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^0 e^{t/T} dt + \frac{1}{2T} \int_0^{\tau + \frac{T_C}{2}} e^{-t/T} dt \\ &= 1 - e^{-\frac{T_C}{2T}} \cdot \cosh \frac{\tau}{T} \end{aligned} \quad (\text{A8.2})$$

Das Ergebnis für positive τ folgt aus (A8.1,2), da das Faltungsprodukt zweier gerader Funktionen wieder gerade ist.

$$\text{rect} \frac{\tau}{T_C} * R_{h1}(\tau) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{T_C}{2T}} \cdot \cosh \frac{\tau}{T} & \text{für } |\tau| \leq \frac{T_C}{2} \\ e^{-\frac{|\tau|}{T}} \cdot \sinh \frac{T_C}{2T} & \text{für } |\tau| > \frac{T_C}{2} \end{cases} \quad (\text{A8.3})$$

Weitere Faltung mit $\frac{1}{T_C} \text{rect} \frac{\tau}{T_C}$ führt auf:

$$\begin{aligned} R_S(\tau) * R_{h1}(\tau) &= \frac{1}{T_C} \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^{\tau + \frac{T_C}{2}} \sinh \frac{T_C}{2T} \cdot e^{t/T} dt \quad \text{für } \tau \leq -T_C \\ &= \frac{\sinh \frac{T_C}{2T}}{T_C} \cdot e^{\tau/T} \cdot T \cdot 2 \cdot \sinh \frac{T_C}{2T} = \frac{T}{T_C} (\cosh \frac{T_C}{T} - 1) \cdot e^{\tau/T} \end{aligned} \quad (\text{A8.4})$$

Für $-\frac{T_C}{2} < \tau < 0$ ist die Integration folgendermaßen auszuführen:

$$R_S(\tau) * R_{h1}(\tau) = \frac{1}{T_C} \cdot \left\{ \sinh \frac{T_C}{2T} \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^{\tau + \frac{T_C}{2}} e^{t/T} dt + \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^{\tau + \frac{T_C}{2}} dt - e^{-\frac{\tau}{T}} \int_{\tau - \frac{T_C}{2}}^{\tau + \frac{T_C}{2}} \cosh \frac{t}{T} dt \right\}$$

$$= \frac{T}{T_C} \left\{ \frac{\tau+T_C}{T} + e^{-\frac{T_C}{T}} \cdot \cosh \frac{\tau}{T} - e^{\tau/T} \right\} \quad (\text{A8.5})$$

Die Funktion für $\tau > 0$ folgt direkt wieder aus den Gln. (A8.4,5) (gerader Verlauf bezüglich τ).

$$R_S(\tau) * R_{h1}(\tau) = \frac{T}{T_C} \cdot \begin{cases} e^{-|\tau|/T} \cdot (\cosh \frac{T_C}{T} - 1) & \text{für } |\tau| \geq T_C \\ \frac{-\tau \cdot \operatorname{sgn} \tau + T_C}{T} + e^{-\frac{T_C}{T}} \cosh \frac{\tau}{T} - e^{-\frac{|\tau|}{T}} & \text{für } |\tau| \leq T_C \end{cases} \quad (\text{A8.6})$$

An den Anschlußstellen $|\tau| = T_C$ sind sowohl die Teilfunktionen als auch ihre Ableitungen stetig. Zur Bestimmung von $R_{Y2}(\tau)$ ist von der AKF $R_S(\tau)$ s. Bild 3.7 mit

$$R_S(\tau) = \begin{cases} \frac{-\tau \cdot \operatorname{sgn} \tau + T_C}{T_C} & \text{für } |\tau| \leq T_C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Beziehung (A8.6) abzuziehen, um die durch Gl. (3.50) gezeigte AKF $R_{Y2}(\tau)$ zu erhalten.

Vertauschen der Filter, d.h. Fall 2 ergibt für

$$R_{h1}(\tau) = \delta_O(\tau) - \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}$$

und
$$R_{h2}(\tau) = \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R_{\tilde{n}}(\tau) &= R_{Y1}(\tau) = N_O \{ \delta_O(\tau) * [\delta_O(\tau) - \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}] \} \\ &= N_O \{ \delta_O(\tau) - \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T} \} \end{aligned} \quad (\text{A8.7})$$

Für den zweiten Korrelatorzweig ist wieder die Faltung der AKF $R_S(\tau)$ mit $R_{h2}(\tau)$ in folgender Form erforderlich:

$$R_{y_1}(\tau) = R_S(\tau) * \frac{1}{2T} e^{-|\tau|/T}$$

Das Ergebnis ist aber bereits durch Gl. (A8.6) berechnet worden (Rollentausch von $R_{h1}(\tau)$ und $R_{h2}(\tau)$). Damit liegt $R_{n1}(\tau)$ durch Multiplikation von Gln. (A8.6) und (A8.7) fest.

$$R_{n1}(\tau) = N_O \left(1 - \frac{T}{T_C} + \frac{T}{T_C} e^{-\frac{T_C}{T}} \right) \delta_O(\tau) - \frac{N_O}{2T_C} \cdot \left\{ \frac{-\tau \operatorname{sgn} \tau + T_C}{T} \cdot e^{-\frac{|\tau|}{T}} - e^{-\frac{2|\tau|}{T}} + \frac{e^{-\frac{T_C}{T}}}{2} \cdot (e^{\frac{2|\tau|}{T}} + 1) \right\}$$

für $|\tau| \leq T_C$

$$R_{n1}(\tau) = \frac{N_O}{2T_C} \cdot \left\{ e^{-\frac{2|\tau|}{T}} \cdot \left(1 - \cosh \frac{T_C}{T} \right) \right\} \quad \text{für } |\tau| \geq T_C$$

Die Fouriertransformation der geraden Funktion $R_{n1}(\tau)$ führt auf das zugehörige Leistungsdichtespektrum

$$S_{n1}(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} R_{n1}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = N_O \left[1 - \frac{T}{T_C} \left(e^{-\frac{T_C}{T}} - 1 \right) \right] + \frac{N_O}{2T_C} \cdot \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{T_C} \tau \cdot e^{-\tau/T} \cos \omega \tau d\tau - \frac{T_C}{T} \int_0^{T_C} e^{-\tau/T} \cos \omega \tau d\tau + (1 - \cosh \frac{T_C}{T}) \cdot \int_0^{T_C} e^{-\frac{2\tau}{T}} \cos \omega \tau d\tau + \frac{1}{2} e^{\frac{T_C}{T}} \cdot \int_0^{T_C} e^{-\frac{2\tau}{T}} \cos \omega \tau d\tau - \frac{e^{-\frac{T_C}{T}}}{2} \int_0^{T_C} \cos \omega \tau d\tau + (1 - \cosh \frac{T_C}{T}) \cdot \int_{T_C}^{\infty} e^{-\frac{2\tau}{T}} \cos \omega \tau d\tau \right\}$$

Nach einigen Zwischenrechnungen und der Normierung $\omega T_C = \Omega$, $b = \frac{T_C}{T}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(\Omega)}{N_0} &= \left[1 + \frac{1}{b} (e^{-b} - 1) \right] - \frac{b^2}{b^2 + \Omega^2} + \frac{2b}{(2b)^2 + \Omega^2} \\
&+ \frac{b}{(b^2 + \Omega^2)^2} \left[(b^2 - \Omega^2) (1 - e^{-b} \cos \Omega) + e^{-b} \cdot 2 \cdot b \Omega \cdot \sin \Omega \right] \\
&- \frac{e^{-b}}{2} \left[\frac{2b}{(2b)^2 + \Omega^2} + \frac{1}{\sqrt{(2b)^2 + \Omega^2}} \cdot \cos(\Omega + \arctan \frac{\Omega}{2b}) + \frac{\sin \Omega}{\Omega} \right]
\end{aligned}$$

A9: Leistungsdichtespektrum des transformierten Rauschens beim Allpaßmodell

Ausgehend von der Gl. (3.58), welche die AKF R_n , des transformierten Rauschens für $|\tau| \leq T_C$ beschreibt, erhält man das Leistungsdichtespektrum zu

$$S_n(\omega) = 2 \cdot \int_0^{T_C} R_n(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

da $R_n(\tau)$ eine gerade Funktion ist.

$$\begin{aligned}
S_n(\omega) &= \frac{8N_0}{T} \left\{ \int_0^T e^{-\tau/T} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{\tau}{T_C}\right) \cdot \cos \omega \tau d\tau \right\} \\
&= \frac{8N_0}{T} \left\{ \int_0^T e^{-\tau/T} \cdot \cos \omega \tau d\tau - \frac{T_C + T}{T \cdot T_C} \int_0^T \tau \cdot e^{-\tau/T} \cdot \cos \omega \tau d\tau \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{T \cdot T_C} \int_0^T \tau^2 e^{-\tau/T} \cdot \cos \omega \tau d\tau \right\} \\
&= \frac{8N_0}{T} \left\{ I_1(\omega) - \frac{T_C + T}{T_C \cdot T} I_2(\omega) + \frac{1}{T \cdot T_C} I_3(\omega) \right\}
\end{aligned}$$

Die Integrale I_1 und I_2 sind in [10] tabelliert. Mit der Normierung $\omega T_C = \Omega$ und $\frac{T_C}{T} = b$ ergibt sich dafür:

$$I_1(\Omega) = \frac{e^{-b} T_c}{b^2 + \Omega^2} \{ (\Omega \cdot \sin \Omega - b \cdot \cos \Omega) + e^{+b} \} \quad (A9.1)$$

$$I_2(\Omega) = \frac{e^{-b} T_c^2}{b^2 + \Omega^2} \left\{ (\Omega \cdot \sin \Omega - b \cdot \cos \Omega) - \frac{(b^2 - \Omega^2) \cdot \cos \Omega - 2b\Omega \cdot \sin \Omega}{b^2 + \Omega^2} + \frac{e^{+b} (b^2 - \Omega^2)}{b^2 + \Omega^2} \right\} \quad (A9.2)$$

In der Gegend von $\Omega = 0$ liefert das Integral I_3 den für $S_n(\Omega)$ entscheidenden Beitrag. Es kann durch partielle Integration auf tabellierte Formen zurückgeführt werden.

$$I_3(\omega) = \int_0^{T_c} \tau^2 e^{-\tau/T} \cdot \cos \omega \tau d\tau = \frac{2 \cdot e^{-\tau/T}}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} (\omega \cdot \sin \omega \tau - \frac{1}{T} \cdot \cos \omega \tau) \Big|_0^{T_c} - \frac{2 \cdot \omega}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \int_0^{T_c} \tau e^{-\tau/T} \cdot \sin \omega \tau d\tau + \frac{2 \cdot \frac{1}{T}}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \cdot \int_0^{T_c} \tau \cdot e^{-\tau/T} \cdot \cos \omega \tau d\tau$$

Mit der schon angegebenen Normierung wird mit $|10|$

$$I_3(\Omega) = \frac{e^{-b} T_c^3}{b^2 + \Omega^2} (\Omega \cdot \sin \Omega - b \cdot \cos \Omega) - \frac{2\Omega T_c}{b^2 + \Omega^2} \left\{ \frac{T_c^2 \cdot e^{-b}}{b^2 + \Omega^2} (-b \cdot \sin \Omega - \Omega \cdot \cos \Omega) - \frac{e^{-b} \cdot T_c^2}{(b^2 + \Omega^2)^2} [(b^2 - \Omega^2) \cdot \sin \Omega + 2b\Omega \cdot \cos \Omega] + \frac{2b\Omega T_c^2}{(b^2 + \Omega^2)^2} \right\} + \frac{2bT_c}{b^2 + \Omega^2} \left\{ \frac{T_c^2 \cdot e^{-b}}{b^2 + \Omega^2} (\Omega \cdot \sin \Omega - b \cdot \cos \Omega) - \frac{e^{-b} \cdot T_c^2}{(b^2 + \Omega^2)^2} [(b^2 - \Omega^2) \cdot \cos \Omega - 2b\Omega \cdot \sin \Omega] + \frac{T_c^2 (b^2 - \Omega^2)}{(b^2 + \Omega^2)^2} \right\}$$

Zusammenfassen dieser Beziehung mit den entsprechend gewichteten Integralen I_1 und I_2 führt auf die Gleichung (3.59).

A10: Ermittlung des zur Orthogonalisierung einer PN-Folge erforderlichen Offsets

Der Mittelwert einer periodischen PN-Folge ist

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{pT_c} \cdot \int_0^{pT_c} s(t) dt.$$

Nach Orthogonalisierung besitzt die Folge $\frac{p-1}{2}$ Werte mit der negativen Größe "B" und $\frac{p+1}{2}$ Werte mit "A" (positiv). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{s(t)} &= \frac{1}{pT_c} \cdot \int_0^{pT_c} \left(\frac{p-1}{2p} B + \frac{p+1}{2p} A \right) dt \\ &= \frac{1}{2} [(p-1)B + (p+1)A] \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Elimination von A durch Gl. (5.14) führt auf

$$\begin{aligned} \overline{s(t)} &= \frac{B}{2} \left[(p-1) - (p+1) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2^n}}\right) \right] \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{B}{2p} \left[\frac{2p+2}{\sqrt{2^n}} - 2 \right] = B \left[\frac{p+1}{\sqrt{2^n}} - 1 \right] \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Aus $p = 2^n - 1$ folgt $p+1 = 2^n$, was in die eckige Klammer eingesetzt wird.

$$\overline{s(t)} = B(\sqrt{2^n} - 1) \cdot \frac{1}{p}$$

Nun kann der Wert für B aus Gl. (5.14) verwendet werden:

$$\overline{s(t)} = -\sqrt{p} \cdot \frac{\sqrt{2^n} - 1}{\sqrt{2^n} - 1} \cdot \frac{1}{p} = -\frac{1}{\sqrt{p}}$$

Der Effektivwert $\overline{s^2(t)}$ ist gleich dem unveränderten Wert der periodischen AKF bei 0, d.h. $R_s(0) = 1 = \overline{s^2(t)}$.

A11: Bestimmung der Phasenbedingungen zur direkten
Synthese orthogonaler Funktionen bei Vorgabe
der periodischen AKF

Die allgemeine diskrete Rücktransformation eines diskreten Spektrums $U(\mu)$ erfolgt bei Periode p mit:

$$u(k) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{\mu=0}^{p-1} U(\mu) \cdot e^{j \frac{2\pi}{p} \mu \cdot k}$$

$U(\mu)$ hat mit $|U(\mu)| \cdot e^{j\varphi_\mu}$ die Eigenschaft, daß $|U(\mu)| = \text{const} = \sqrt{R_O(0)} = \sqrt{d(0)}$ ist für $\mu = 0(1)(p-1)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{\sqrt{R_O(0)}}{p} \cdot \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{j\varphi_\mu} \cdot e^{j \frac{2\pi}{p} \mu k} \\ &= \frac{\sqrt{R_O(0)}}{p} \left\{ \sum_{\mu=0}^{p-1} \cos\left(\varphi_\mu + \frac{2\pi}{p} \mu k\right) \right. \\ &\quad \left. + j \sum_{\mu=0}^{p-1} \sin\left(\varphi_\mu + \frac{2\pi}{p} \mu k\right) \right\} \end{aligned}$$

Zum Erreichen der Reellwertigkeit von $u(k)$ muß offenbar gelten:

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} \sin\left(\varphi_\mu + \frac{2\pi}{p} \mu k\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A11.1})$$

$$\forall k, \mu \in \{0, (1)(p-1)\}$$

Setzen von

$$\begin{aligned} \sin\left(\varphi_\mu + \frac{2\pi}{p} \mu k\right) &= -\sin\left[\varphi_{p-\mu} + \frac{2\pi}{p} (p-\mu)k\right] \\ &= -\sin\left[\varphi_{p-\mu} + \frac{2\pi}{p} pk - \frac{2\pi}{p} \mu k\right] \end{aligned}$$

$$\sin\left(\varphi_\mu + \frac{2\pi}{p} \mu k\right) = -\sin\left(\varphi_{p-\mu} - \frac{2\pi}{p} \mu k\right)$$

und Vergleich der Argumente nach Hereinziehen des Vorzeichens im rechten Ausdruck führt auf:

$$\varphi_{\mu} = -\varphi_{p-\mu} \quad (\text{A11.2})$$

Wenn zusätzlich die Werte $\sin(\varphi_0)$ und bei geradem p $\sin(\varphi_{p/2})$ keinen Beitrag zur Summe (A11.1) liefern, ist mit (A11.2) die Reellwertigkeit von $u(k)$ erfüllt.

Literatur

- | 1 | Achilles, D.:
Zum Entwurf von Allpässen für die Verdichtung
von Impulsen
Ausgewählte Arbeit über Nachrichtensysteme,
hrsg. von W. Schüßler, Nr. 7, Karlsruhe 1967.
- | 2 | Aldinger, M.; Herold, W.E.; Krick, W.:
Spektrale Spreizung als Multiplex-Verfahren -
Eine Einführung
NTZ 28 (1975), Heft 3, S. 79 - 88.
- | 3 | Annecke, K.H.:
Synchronisation von mod 2 kombinierten Trägern
in asynchronen Breitbandnetzen
NTZ - Fachberichte Band 65, September 1978, Berlin.
- | 4 | Baier, W.P.; Meffert, K.:
Optimale Taktfrequenz bei Nachrichtenübertragungs-
systemen mit pseudozufälliger Phasensprungmodulation
Frequenz 31 (1977) 8, S. 243 - 246.
- | 5 | Baier, W.P.; Pandit, M.:
Combined Acquisition And Fine Synchronization System
For Spread Spectrum Receivers Using A Tapped Delay
Line Correlator
Presented at the AGARD-Symposium in Ottawa,
October 11 -15, 1977.
- | 6 | Barker, R.H.:
Group Synchronizing of Binary Digital Systems,
in Communication Theory, W. Jackson, ed.
London 1953, S. 273 - 287.
- | 7 | Barnick, W.:
Spezielle Verfahren zur Verarbeitung hydroakustischer
Empfangssignale
Nachrichtentechnik, Elektronik - 26 (1976) H. 4
S. 141 - 143.

- | 8 | Boehmer, A.M.:
Binary Pulse Compression Codes
IEEE Tr. On IT, Vol. IT - 13, No. 2, 1967, pp. 156 - 167.

- | 9 | Bracewell, R.M.:
The Fourier Transform and Its Applications
Mc Graw-Hill, 1965.

- | 10 | Bronstein - Semendjajew:
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, 1969.

- | 11 | Brunk, M.:
Regelungsverfahren der Nachrichtentechnik
Vorlesung an der Universität Erlangen, 1975/76.

- | 12 | Cahn, C.R.:
Spread Spectrum Applications And State - Of - The -
Art Equipments
Nato AGARD Lecture Series 23, Nr. 58
"Spread Spectrum Communications" 1973.

- | 13 | Davies, A.C.:
Probability Distributions of Noiselike Waveforms
Generated by A Digital Technique
Electronic Letters 4 (1968), pp. 421 - 423.

- | 14 | Davies, A.C.:
Probability - Density Function of Digitally Filtered
m Sequences
Electronic Letters 5 (1969), pp. 222 - 224.

- | 15 | Davies, N.G.; Wohlberg, D.B.:
Spread Spectrum Techniques
IEE Conference Publication, Number 144, Sept. 1976.

- [16] Davies, A.C.; Al Najjar, N.A.S.; Al-Rawas, L.A.A.:
Synchronisation Of A Spread-Spectrum Receiver By
A Microprocessor - Control System,
IEE Conference
pp. 449 - 455.

- [17] Diamond, F.I. u.a.:
New Devices For Digital Communications In Avionics
AGARD Conference Reprint No. 239, München 1978.

- [18] Dixon, R.C.:
Spread Spectrum Systems
John Wiley & Sons, 1976.

- [19] Forster, H.:
Das Simulationsprogramm SIMPRO,
Umdruck am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg, 1976.

- [20] Frank, G.:
Untersuchungen an einer analogen Delay-Locked-Loop-
Schleife
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen, 1977.

- [21] Gaugg, A. u.a.:
Grenzen der Eignung von Pseudozufallssignalen für
statistische Tests
AEÜ, Band 27 (1973), Heft 1, S. 30 - 36.

- [22] Gerhardt, L.A.:
State Of The Art In Digital Signal Processing With
Applications To Multiple Access Systems
AGARD Conference, München 1978.

- [23] Gill, W.J.:
A Comparison of Binary Delay-Lock Tracking-Loop
Implementations
IEEE Tr. On AES, Vol. AES-2, July 1966, pp. 415 - 424.

- 24 Gill, W.J.; Spilker, J.J.Jr.:
An Interesting Decomposition Property for the
Self-Products of Random or Pseudorandom Binary
Sequences
IEEE Tr. ON CS, Vol. C-S-11, June 1966, pp. 246 - 247.
- 25 Gilson, R.P.:
Some Results of Amplitude Distribution Experiments
on Shift Register Generated Pseudo-Random Noise
IEEE Tr. On Electronic Computers, December 1966,
pp. 926 - 927.
- 26 Golomb, S.W.:
Generalized Barker Sequences
IEEE Tr. On IT., Vol. IT-11, No. 4, 1965, pp. 533 - 537.
- 27 Grallert, H.J.:
Transformation von Bilddaten mit Hilfe von m-Funktionen
Frequenz 30 (1976) 7, S. 196 - 199.
- 28 Grallert, H.J.:
Transformation von Graubildern mit orthonormierten
m-Sequenzen (m-Funktionen)
Diss. RWTH Aachen, 1977.
- 29 Grünberger, G.K.:
Die Diskriminator-Kennlinie des bandpasskorrelierten
Delay-Locked Loop bei Mehrwegeempfang.
AEÜ, Band 30 (1976), Heft 1, S. 1 - 8.
- 30 Herold, W.:
Ein Funktelefonsystem mit Codemultiplex
NTZ 27 (1974), H. 7, S. 253 - 259.
- 31 Herold, W.; Aldinger, M.:
Aufbau und Eigenschaften von quasiorthogonalen
Codekollektiven
AEÜ, Band 27 (1973), Heft 11, S. 463 - 470.

- [32] Hänel, H.:
Eigenschaften von Pseudo-Zufallsfolgen
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der
Universität Erlangen, 1977.
- [33] Jirmann, J.:
Untersuchungen an einer analogen Verzögerungsleitung
Studienarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen, 1978/79.
- [34] Kosel, G.:
Verbesserung des Haupt- zu Nebenmaximumverhältnisses
der Autokorrelationsfunktion binär codierter Radar-
signale
AEÜ, Band 24 (1970), Heft 6, S. 302, 303.
- [35] Lange, F.H.:
Signale und Systeme 3
VEB Verlag Berlin, 1971.
- [36] Lehmann, K.:
Entwurf von Filterstrukturen zur Erzeugung mehrstufi-
ger Codes mit Barker-Autokorrelations-Eigenschaften
AEÜ, Band 33 (1979), S. 190 - 192.
- [37] Lehmann, K.:
Erzeugung mehrstufiger orthogonaler, periodischer
Folgen
AEÜ, Band 34 (1980), S. 37-40.
- [38] Lehmann, K.:
Korrelationsempfang zur Entfernungsmessung
Seminarvortrag am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen, Februar 1977.
- [39] Lindner, J.:
Binary Sequences Up To The Length 40
With Best Possible Autocorrelation Function
Electronics Letters, Oct. 1975, Vol. 11, No. 21, p. 507.

- | 40 | Lindner, J.:
 Kollektive von Binärfolgen für asynchrones
 Codemultiplex
 AEÜ, Band 31 (1977), Heft 6, S. 231 - 238.

- | 41 | Lindner, J.:
 Synthese zeitdiskreter Binärsignale mit speziellen
 Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen
 Diss. RWTH Aachen, 1977.

- | 42 | Lindner, J.:
 Kanalcodierung durch Binärfolgen mit speziellen
 Korrelationsfunktionen
 NTG-Fachberichte Band 65, September 1978, Berlin.

- | 43 | Lindsey, W.C.:
 Synchronization Systems in Communication and Control
 Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1972.

- | 44 | Lindsey, W.C.; Simon, M.K.:
 Telecommunication Systems Engineering
 Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

- 45 | Lüke, H.D.:
 Signalübertragung
 Springer-Verlag 1975.

- 46 | Mayer, R.:
 Die Selektivität eines Impuls-Doppler-Tracking Radar
 NTZ 1968, Heft 8, S. 457 - 463.

- | 47 | Meffert, K.:
 Spektrale Zerlegung des Quadrats eines bandbegrenzten
 binären Zufallssignals
 AEÜ, Band 30 (1976), Heft 3, S. 134 - 135.

- | 48 | Meyr, H.:
 Delay-Lock Tracking of Stochastic Signals
 IEEE, Tr. ON COM, Vol. COM-24, No. 3, March 1976,
 pp. 331 - 339.

- |49| Meyr, H.:
Untersuchung korrelativer Trackingsysteme mit
Hilfe der Fokker-Planck Methode
Diss. ETH Zürich, Nr. 5223, 1974.
- |50| Moharir, P.S.:
Ternary Barker Codes
Electronics Letters, Oct. 1974, Vol. 10, No. 22,
pp. 460 - 461.
- |51| Mosca, E.:
Sidelobe Reduction in Phase-Code Pulse
Compression Radars
IEEE IT-13 (1967), pp. 131 - 134.
- |52| Oberhettinger, F.:
Tabellen zur Fourier-Transformation
Springer-Verlag, 1957.
- |53| Petersen, J.:
Ein Beitrag zum Entwurf von Impulsformern
Ausgewählte Arbeit über Nachrichtensysteme,
hrsg. von W. Schüßler, Nr. 1, Karlsruhe 1966.
- |54| Petersen, J.:
Katalog normierter Übertragungsfunktionen und
Schaltungen minimalphasiger und allpasshaltiger
Tiefpaß-Impulsformer für Sprung-Erregung
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme,
hrsg. von W. Schüßler, Nr. 4, Karlsruhe 1966.
- |55| Rosenkranz, W.:
Störverhalten analoger Nachlaufsynchronisations-
schaltungen
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen, 1976.
- |56| Rudershausen, R.:
Synthese von Korrelationscodes für die Impuls-
kompression
Tagung der DGON, Nov. 1974, München.

- [57] Schlitt, H.:
Systemtheorie für regellose Vorgänge
Springer-Verlag 1960.
- [58] Schlitt, H.:
Stochastische Vorgänge in linearen und nicht-
linearen Regelkreisen
Friedr. Vieweg & Sohn, 1968.
- [59] Schneeweiss, W.G.:
Zufallsprozesse in dynamischen Systemen
Springer-Verlag, 1974.
- [60] Schneeweiss, W.G.; Kortüm, W.:
Stochastische Prozesse und Filterung
CCG-Lehrgang, Oberpfaffenhofen, Januar 1979.
- [61] Schneider, K.S.:
Optimum Detection of Code Division Multiplexed
Signals
IEEE Tr. On Aerospace And Electronic Systems,
Vol. AES-15, No. 1, January 1979, pp. 181 - 185.
- [62] Scholtz, R.A.:
The Spread Spectrum Concept
IEEE Tr. On COM, Vol. COM-25, Nr. 8, August 1977,
pp. 748 - 755.
- [63] Schüßler, H.W.:
Skripten des Lehrstuhles für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen,
Nr. 1, 1976; Nr. 2, 1977; Nr. 5, 1979; Nr. 6, 1978;
Nr. 12, 1978; Nr. 13, 1978.
- [64] Schüßler, H.W.:
Digitale Systeme zur Signalverarbeitung
Springer-Verlag, 1973.

- [65] Schüssler, H.W.:
Über den Entwurf optimaler Suchfilter
NTZ 17 (1964), S. 605 - 613.
- [66] Schweizer, L.:
Eigenschaften und Anwendungen von binären
Quasi-Zufallsfolgen
Frequenz 24 (1970) 8, S. 230 - 234.
- [67] Seidler, P.:
Nebenmaximumreduktion bei Korrelationsempfang
binär phasencodierter Impulssignale
NTZ 29 (1976), Heft 2, S. 154 - 159.
- [68] Seidler, P.:
Nebenzipfelreduktion bei Impulskompression
binär phasencodierter Signale
Diss. RWTH Aachen, 1974.
- [69] Spilker, J.J.; Magill, D.T.:
The Delay-Lock-Diskriminator - An Optimum
Tracking Device
Proc. IRE, Sept. 1961, pp. 1403 - 1416.
- [70] Spilker, J.J.:
Delay-Lock Tracking of Binary Signals
IEEE Tr. On Space Electronics and Telemetry,
March 1963, pp. 1 - 8.
- [71] Spilker, J.J.:
Digital Communications by Satellite
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [72] Taki, Y. et.al.:
Even-Shift Orthogonal Sequences
IEEE Tr. ON IT, Vol. IT-15, No. 2, March 1969,
pp. 295 - 300.

- [73] Tomlinson, G.H.; Galvin, P.:
Analysis of skewing in amplitude distributions
of filtered m sequences
Proc. IEEE, Vol. 121, No. 12, December 1974,
pp. 1475 - 1479.
- [74] Tomlinson, G.H.; Galvin, P.:
Elimination Of Skewing In The Amplitude Distri-
butions Of Long m Sequences Subjected To Low-Pass
Filtering.
Electronics Letters 4 (1975), pp. 77 - 78.
- [75] Tropper, A.M.:
Matrizenrechnung in der Elektrotechnik
BI Hochschultaschenbuch Bd. 91, 1962.
- [76] Unbehauen, R.:
Systemtheorie, Eine Einführung für Ingenieure
Oldenbourg Verlag, 1969.
- [77] Ward, R.B.:
Digital Communications On A Pseudonoise Tracking
Link Using Sequence Inversion Modulation
IEEE Tr. On COM, Febr. 1967, pp. 69 - 78.
- [78] Zecha, M.:
Energiespektrum und Auflösungsvermögen von
Ortungssignalen
Nachrichtentechnik, Elektronik - 27 (1977)
H. 10, S. 407 - 410.

L e b e n s l a u f

Name: Klaus Dieter Lehmann, geb. am 10.6.1942
in Salzgitter-Lebenstedt als einziges
Kind meiner Eltern Robert und Emma
Lehmann, geb. Berger

Schulausbildung: Von Ostern 1949 bis 1953 Besuch der
Volksschule im Geburtsort,
ab 1953 Mittelschule.
1959 Verlassen der Mittelschule mit
mittlerer Reife.

Berufsausbildung: 1.4.1959 bis 31.3.1962 Industrielehre als
Starkstromelektriker bei der Firma
Steine & Erden GmbH, Goslar.
Vorzeitiger Abschluß der Lehre mit Fach-
arbeiterprüfung.
Anschließend 5 Monate Facharbeitertätig-
keit bei der gleichen Firma.

Erststudium: 7.7.1962 Aufnahmeprüfung bei der Staatl.
Ingenieurschule Wolfenbüttel, Fachrichtung
Allgemeine Elektrotechnik.
Beginn des Studiums im WS 1962.
In den Semesterferien zusätzlich neun
Wochen Praktikantentätigkeit bei der ehe-
maligen Lehrfirma und weiterhin 6 Wochen im
Zentrallabor für Nachrichtentechnik der
Fa. Siemens & Halske, München.
Beendigung des Studiums am 17.7.1965 durch
Ingenieurhauptprüfung und Erwerb der einge-
schränkten Hochschulreife.

Weitere Berufs- ausbildung:	2.8.1965 bis 2.8.1966 Laufbahnausbildung für den gehobenen techn. Dienst bei der Bundesanstalt für Flugsicherung (BFS) in München und Hannover. Ablegung der Laufbahnprüfung und Ernennung zum Techn. Reg. Inspektor z.A. am 2.8.1966. Anschließend 1 Jahr Tätigkeit im radartechnischen Dienst in Frankfurt (vorwiegend) und Hannover. Am 1.7.1967 Ernennung zum Ausbildungsleiter für den mittleren und gehobenen techn. Dienst bei der Leitstelle Hannover. Bis Ende 1973 ca. 1/2 Jahr Tätigkeit als Gastlehrer bei der Flugsicherungsschule München und weiterhin Absolvierung von Fortbildungslehrgängen in Radar- und Navigationstechnik (ca. 15 Wochen).
Statusänderungen als Beamter:	2.4.1968 Techn. Reg. Inspektor 1.2.1969 Techn. Reg. Oberinspektor 1.3.1969 Techn. Reg. Oberamtmann Juli 1969 Beamter auf Lebenszeit
Weiteres Studium:	Ab WS 1969 nebenberufliches Studium bei der TU Hannover, Fachrichtung Hochfrequenztechnik. Ablegung des Vorexamens im Herbst 1971, des Hauptexamens im Dezember 1973 mit Diplomhauptprüfung. Von Anfang 1972 bis Ende 1973 insgesamt 12-monatige Beurlaubung von der BFS ohne Dienstbezüge. Anfang 1974 Ausscheiden bei der BFS auf eigenen Wunsch.

Weitere berufliche
Tätigkeit:

Ab 1.1.1974 als wiss. Mitarbeiter,
ab 26.3.1974 als wiss. Assistent
bei der Universität Erlangen-Nürnberg,
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik.

Am 21.4.1972 heiratete ich Ursula
geb. Gleichmann,
am 25.2.1975 wurde unsere Tochter
Claudia geboren.

Klaus Lehmann

(Klaus Lehmann)

RECEIVED
JAN 10 1900
U.S. DEPT. OF AGRICULTURE
WASHINGTON, D.C.

TO THE SECRETARY OF AGRICULTURE
WASHINGTON, D.C.

FROM THE DIRECTOR OF THE BUREAU OF PLANT INDUSTRY
WASHINGTON, D.C.

SUBJECT: [Illegible]

[Illegible text block]

[Illegible text block]

[Illegible text block]



Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30

Tel. 09131-26197